Гл. 11. Дифференциальные уравнения.

§ 1.1 Дифференциальные уравнения.

Определение 1. *Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, её функцию и производные различных порядков этой функции.*

Общий вид дифференциального уравнения n-ого порядка:

$$F(x,y,y',y''...y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной в него входящей.

Примеры:

$y'+2\sin y\cdot x=2$ - дифференциальное уравнение I-го порядка

$y''+\cos x\cdot y'+\sin y=0$ - дифференциальное уравнение II-го порядка

Определение 2. *Любая функция $y=\varphi(x)$, которая удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (1), т.е. обращает его в тождество при замене y и его производных на $\varphi(x)$ и её производные называется решением дифференциального уравнения*

Замечание 1. *Если искомая функция $y=\varphi(x)$ зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным.***

Замечание 2. *Если искомое решение получено в неявном виде, то это **интеграл уравнения.***

График решения обыкновенного дифференциального уравнения I - ого порядка называется интегральной кривой этого уравнения.

Термин проинтегрировать дифференциальное уравнение означает найти те или иные его решения.

Определение 3. *Общим решением дифференциального уравнения (1) называется такое его решение: $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$, каков порядок этого уравнения.*

Если общее решение задано в неявном виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, то его называют общим интегралом.

§ 1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x,y,y')=0 \qquad (2)$$

или $y'=f(x,y)$ - форма дифференциального уравнения разрешённого относительно производной,

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ - форма дифференциального уравнения в дифференциалах.

Определение 1. *Общим решением дифференциального уравнения (2) называется такая функция $\varphi(x,C)$ двух аргументов x и C, которая* *при постоянном C рассматривается как функция одного переменного. Решения $\varphi(x, C_0)$, которые получаются из общего решения $\varphi(x, C)$ при нахождении постоянной $C = C_0$, называются его частными решениями.*

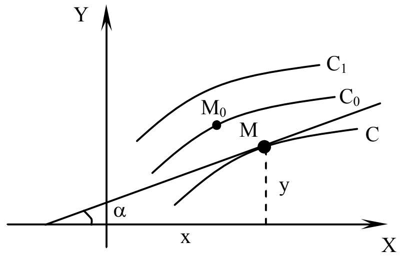

Рис.1

На рис.1 изображено семейство кривых, т.е. совокупность линий соответствующих различным значениям постоянных C. Интегральные кривые обладают свойством, что в каждой их точке $M(x, y)$ наклон касательной удовлетворяет условию:
$tg\alpha = f(x, y)$

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то из бесконечного семейства интегральных кривых выделяется одна интегральная кривая, которая соответствует частному решению дифференциального уравнения. Это означает наличие начального условия $y = y_0$ при $x = x_0$.

Для известного общего решения $y = \varphi(x, C)$, можно найти $y_0 = \varphi(x_0, C)$, что позволяет определить C и найти частное решение.

Дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями называется задача Коши:

Найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее данному начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, т.е. принимающее при $x = x_0$, заданное значение $y = y_0$.

Замечание 1. *Если решение дифференциального уравнения не может быть получено из общего ни при каких начальных условиях оно называется особым.*

§ 1.3 Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

1) Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными:

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy,$$

где множителем при dx является функция, зависящая только от x, а множителем при dy - функция, зависящая только от y.

Решение находится методом интегрирования обеих частей.

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$$

Пример 1. $2xdx - (5y^4 + \cos y)dy = 0$

$$\int 2xdx = \int (5y^4 + \cos y)dy$$

$x^2 = y^5 + \sin y + C$ **-** общий интеграл.

2) Дифференциальные уравнения вида $y' = f_1(x) f_2(y)$, где правая часть представляет собой произведение двух функций, из которых одна не зависит от x, а вторая не зависит от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$

Пример 2. $2x + \frac{y'}{y} = 0$

$y' = \frac{dy}{dx}$; умножаем на dx обе части уравнения

$2xdx + \frac{dy}{y} = 0 \qquad \int 2xdx + \int \frac{dy}{y} = 0$

$x^2 + \ln y = C$ - общий интеграл

$\ln y = C - x^2$; $\quad e^{C-x^2} = y$ - общее решение

3) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, записанные в форме дифференциалов:

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0 \text{ или } y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y}{f_2(y} f_3(x)f_4(y)dy = 0$$

для решения таких дифференциальных уравнений их надо привести к виду 1 т.е. к дифференциальным уравнениям с разделёнными переменными.

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C$$

Пример 3. $2x\sin ydx - (x^2+3)\cos ydy = 0$

$2x\sin ydx = (x^2+3)\cos ydy$

Разделим на произведение $\sin y(x^2+3)$

$$\frac{2x\sin ydx}{\sin y(x^2+3)} = \frac{(x^2+3)\cos ydy}{\sin y(x^2+3)} \quad \to \quad \frac{2xdx}{x^2+3} = \frac{\cos ydy}{\sin y}$$

Проинтегрируем полученные выражения

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3} = \int \frac{\cos ydy}{\sin y} \quad \to \quad \ln|x^2+3| = \ln|\sin y| + \ln C$$

по свойству логарифмов $(x^2+3) = C\cdot \sin y$ - общий интеграл дифференциального уравнения.

Определение 1. *Функция f(x,y) называется однородной функцией n-ого измерения, если при замене в ней переменных x и y соответственно на tx и ty, где t - произвольная величина (параметр) получается та же функция, умноженная на* t^n *, т.е. если выполняется условие:* $f(tx,ty) = t^n \cdot f(x,y)$
n – степень однородности уравнения.

Однородная функция степени *n* представима в виде $f(x,y) = x^n \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Однородная функция нулевой степени может быть записана в виде $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Определение 2. *Если функции M(x,y) и N(x,y) однородные одной и той же степени n, то дифференциальное уравнение*
M(x,y)dx+ N(x,y)dy=0 (3) *называется однородным.*

Например, уравнение $(x^2+y^2)dx + x^2dy = 0$ является однородным поскольку функции x^2+y^2 и x^2 являются однородными. (Проверьте самостоятельно).

Уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если оно имеет вид:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

Очевидно, что $f(x,y)$ - однородная функция нулевого измерения.

Уравнения (3) и (4) приводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки.

$t = \frac{y}{x}$ т.е. $y = t \cdot x$ и $y' = t'x + t$ или в дифференциалах $dy = tdx + xdt$

Пример 4. $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$ $\frac{y}{x} = t$; $y' = \frac{dy}{dx}$**.** Использовав замену переменных имеем $t'x + t = t + tgt$. Далее $t'x = t + tgt - t$

$t'x = tgt$, так как $t' = \frac{dt}{dx}$, то $\frac{dt}{dx} = \frac{tgt}{x}$. Разделив переменные получим

$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dt}{tgt}$ и после интегрирования $\ln x = \ln|\cos t| + \ln|C|$.

Применив свойства логарифмов получим $x = \cos t \cdot C$, вернемся к исходной функции и получим общий интеграл уравнения $x = C \cdot \cos\frac{y}{x}$.

Другой способ: $dy = \left(\frac{y}{x} + tg\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$, воспользуемся заменой

$tdx + xdt = (t + tgt)dx$ приведём подобные по дифференциалам

$tdx - tdx - tgtdx = xdt = tdx + tgtdx - tdx$

$xdt = tgtdx$ разделив переменные и проинтегрировав получим тот же ответ.

§ 1.4 Линейные уравнения первого порядка.

Определение 1. *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется такое дифференциальное уравнение, в которое неизвестные функции y и y' входят в первых степенях и не перемножаются между собой.*

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \qquad (5)$$

Если $Q(x) = 0$, то уравнение (5) – линейное однородное и одновременно с разделяющимися переменными.

Методы решения: метод Бернулли и метод Лагранжа

а) Метод Бернулли.

1) Будем искать решение в виде $y = U \cdot V$, тогда $y' = U'V + V'U$ или $dy = Vdu + Udv$ (это подстановка Бернулли, где V - вспомогательная функция.)

Пример 1. $xy' - 2y = 2x^4$ $\qquad x(U'V + V'U) - 2UV = 2x^4$

$xU'V + xV'U - 2UV = 2x^4$

2) $xU'V+U(xV'-2V)=2x^4$ найдём функцию V таким образом, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$xV'-2V=0$$

$$x\frac{dV}{dx}=2V$$

$$\int\frac{dV}{V}=2\int\frac{dx}{x}$$

Интегрируя уравнение, получаем $\ln V=\ln x^2 \Rightarrow V=x^2$. Поскольку функция V выбрана, чтобы удовлетворять определенному условию мы опускаем постоянную C. Полученное выражение подставляем в исходное уравнение (пункт 2).

$$x\cdot\frac{dU}{dx}\cdot x^2=2x^4$$

$$\frac{dU}{dx}=x\Rightarrow U=\int xdx=x^2+C$$

Объединив полученные выражения для V и U в подстановке Бернулли, получим окончательное общее решение уравнения $y=x^2(x^2+C)$.

б) Метод вариации произвольной постоянной. (Метод Лагранжа)
Покажем применение метода на том же примере.

1) $xy'-2y=2x^4$

Сначала решаем данное уравнение без правой части: $xy'-2y=0$.

$$x\frac{dy}{dx}=2y$$

$$xy'-2y=0 \qquad \frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x} \qquad \ln y=2\ln x+\ln C \qquad y=C\cdot x^2$$

Пусть *C=C(x)* - некоторая неизвестная функция в уравнение (1), тогда $y=x^2\cdot C(x)$и $y'=2x\cdot C(x)+x^2\cdot C'(x)$. Подставляем в исходное уравнение

$$x\cdot 2x\cdot C(x)+x\cdot x^2\cdot C'(x)-2x^2C(x)=2x^4 \qquad \div(x^2)$$

$$2C(x)+x\cdot C'(x)-2C(x)=2x^2$$

$$C'(x)=2x\Rightarrow C(x)=\int 2xdx=x^2+C$$

Подставляем полученное выражение в $y=C(x)\cdot x^2$ и получаем окончательное решение $y=x^2(x^2+C)$.

в) Уравнение Бернулли.

Общий вид уравнения: $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n$, слева линейное выражение, а справа присутствует множитель y^n ($(n=const)$).

Умножим обе части на $\frac{1}{y^n}$

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+P(x)\frac{1}{y^{n-1}}=Q(x)$$

Применив подстановку $z(x)=\frac{1}{y^{n-1}}$ и $\frac{dz}{dx}=z'=(1-n)\cdot\frac{1}{y^{n}}\cdot y'$,

$\frac{1}{y^n}\cdot y'=\frac{z'}{(1-n)}$ получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{z'}{(1-n)}+P(x)z(x)=Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z(x)=Q(x)(1-n)$$

Это линейное уравнение I-го порядка, для его решения применяем, например, подстановку Бернулли.

Пример 1. $y'+2y=y^{2}\cdot e^{x} \quad n=2 \; (\div y^2)$

$$z=\frac{1}{y^{2-1}}=\frac{1}{y}$$

$$z'+(-1)2z(x)=e^{x}(-1)$$

$$z'-2\cdot z(x)=-e^{x}$$

Применяем подстановку Бернулли

$$z=U\cdot V \qquad z'=U'V+V'U$$

(1) $U'V+V'U-2UV=-e^{x}$

$$V'-2V=0 \quad \frac{dV}{V}=2dx$$

$$\ln|V|=2x \qquad V=e^{2x}$$

$$U'e^{2x}=-e^{x} \quad \rightarrow(1)$$

$$\frac{dU}{dx}=-e^{-x} \quad dU=e^{-x}dx \; ; \; U=e^{-x}+C$$

$$Z=e^{2x}(e^{-x}+C) \quad y=\frac{1}{Ce^{2x}+e^{x}}$$

Второй способ.

$$y'+2y=y^{2}\cdot e^{x}$$

$$y=U\cdot V \quad y'=U'V+V'U$$

$$U'V+V'U+2UV=e^{x}\cdot U^{2}\cdot V^{2}$$

$$V'+2V=0 \quad \frac{dV}{V}=-2dx \quad \ln|V|=-2x \quad V=e^{-2x}$$

$$U'\cdot e^{-2x}=e^{x}\cdot U^{2}\cdot e^{-4x}$$

$$U'=U^{2}\cdot e^{-x} \quad \frac{dU}{dx}=U^{2}\cdot e^{-x} \quad \frac{dU}{U^{2}}=e^{-x}dx$$

$$-\frac{1}{U}=-e^{-x}-C \quad U=\frac{1}{C+e^{-x}} \quad y=\frac{e^{-2x}}{C+e^{-x}}=\frac{1}{Ce^{2x}+e^{x}}$$

§ 1.5 Уравнения в полных дифференциалах.

Определение 1. *Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение вида:*
$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$, где $M(x, y)dx+N(x, y)dy=dU(x, y)$ –полный дифференциал функции $U(x, y)$, то есть $dU(x,Y)=0$

если в области D определения функции M(x, y) и $N(x, y)$
и существования решения дифференциального уравнения выполняется равенство

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения $dU(x,Y)=0$
ищем в виде a) или b)

a) $U(x,y)=\int M(x,y_0)dx+\varphi(y)$

b) $U(x,y)=\int N(x,y)dy+\varphi(x)$

неизвестные $\varphi(y)$ и $\varphi(x)$ находят из второго условия

Пример 1. $(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy+10y)dy=0$

$M(x,y)=3x^2y+y^2 \quad N(x,y)=x^3+2xy+10y$

Общий интеграл: $U(x,y)=\int(3x^2y+y^2)dx+\varphi(y)=x^3y+y^2x+\varphi(y)$

ищем в виде a) $\dfrac{du}{dy}=2xy+x^3+\varphi'(y)=x^3+2xy+10y$ значит

$\varphi'(y)=10y$,отсюда $\varphi(y)=5y^2+C$

$U(x,y)=x^3y+xy^2+5y^2+C$ - решение.

§ 1.6 Уравнения высших порядков.

Определение 1. *Все дифференциальные уравнения порядка выше первого называют дифференциальными уравнениями высших порядков.*

Общий вид:

$$F(x,y,y'...y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

В форме, разрешённой относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x,y,y'...y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Общее решение будет зависеть от n произвольных постоянных. Для выделения частного решения задаются дополнительные условия. Для уравнения (n)-ого порядка в качестве начальных условий задают значения искомой функции и всех её производных до (n-1) порядка включительно ,т.е.:

$x=x_0$; $y=y_0$; $y'=y_0'$; … $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) – система начальных условий.

Определение 2. *Задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющую системе начальных условий (3), называют задачей Коши.*

§ 1.7 Уравнения, допускающие понижение порядка.

1) Уравнения вида:

$$y^{(n)}=f(x)$$

Порядок понижается путём непосредственного интегрирования.

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

Пример 1. $y'''=3x^2$

$$y''=\int 3x^2dx=x^3+C_1$$

$$y'=\frac{x^4}{4}+C_1x+C_2$$

$$y=\frac{x^5}{20}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3 \qquad \text{- общее решение}$$

Заметим, что количество постоянных C_i в общем решении всегда равно порядку исходного дифференциального уравнения

2) Уравнения, не содержащие искомой функции y т.е. вида:

$$F(x,y',y'')=0$$

Метод решения: Вводится новая неизвестная функция $\begin{matrix} z(x)=y' \\ z'(x)=y'' \end{matrix}$

получаем $F(x,z,z')=0$ - уравнение 1-го порядка

Пример 2. $y''-\frac{y'}{x}=xe^x \quad ; \quad y'=z(x) \quad ; \quad y''=z'(x)$

$z'-\frac{z}{x}=x\cdot e^x$ - линейное дифференциальное уравнение I-го порядка решаем методом Бернулли $z=U\cdot V \quad z'=U'V+V'U$

$$U'V+V'U-\frac{UV}{x}=xe^x \qquad V\left(U'-\frac{U}{x}\right)+V'U=xe^x$$

$$U'V+U\left(V'-\frac{V}{x}\right)=xe^x \quad \left(V'-\frac{V}{x}\right)=0 \quad \frac{dV}{dx}=\frac{V}{x} \quad \frac{dV}{V}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln V=\ln x \qquad V=x$$

найдём функцию U из условия $\left(U'-\frac{U}{x}\right)=0$.

$$\frac{dU}{dx}=\frac{U}{x} \;;\; \frac{dU}{U}=\frac{dx}{x} \;;\; \ln U=\ln x \;;\; U=x \text{ ,тогда}$$

$$U'x=xe^x \;;\; dU=e^xdx \;;\; U=e^x+C_1$$

$z = UV = x(e^x + C_1)$ вернёмся к исходной функции

$y' = x(e^x + C_1)$; $dy = x(e^x + C_1)dx$

$$y = \int xe^x dx + C_1 \int xdx \ ; \ \int xe^x dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ e^x dx = dV & V = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

$y = e^x(x-1) + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$ - общее решение.

3) Уравнение не содержащее независимой переменной x;

$$F(y, y', y'') = 0$$

Метод решения: Пусть y - новая независимая переменная, тогда

$p(y) = y'$ - новая функция

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \qquad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Пример 3. $y^3 \cdot y'' = -1$ нач. усл. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$$y^3 \cdot y'' = -1 \ ; \ y' = p(y) \ ; \ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$y^3 \cdot p\frac{dp}{dy} = -1 \ ; \ pdp = -\frac{dy}{y^3}$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$$

воспользуемся н.у. $y' = p = 0$ $y = 1$ найдём C_1

$0 = 1 + C_1 \Rightarrow \quad C_1 = -1$

$$p^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \ ; \ p = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \ ; \ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \ ; \ \frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{\sqrt{1-y^2}} = x + C_2 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-y^2} = x + C_2 \ ;$$

$$-\sqrt{1-y^2} = x + C_2$$

найдём C_2 при $y = 1$ $x = 1$

$-\sqrt{1-1} = 1 + C_2$; $C_2 = -1$

$-\sqrt{1-y^2} = x - 1$

Ответ: $1 - x = \sqrt{1-y^2}$ - частное решение.

Определение 1. *Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида:*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_{n-1} y' + a_n y = b \qquad (1),$$

где $a_1 \dots a_n$, b , b *- произвольные функции от* x.

Линейное – нет произведений и все функции и производные в 1-ой степени.

Если $a_0(x) \not\equiv 0$ то уравнение можно записать в “приведённом” виде.

$$y^n + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots p_n(x) y = f(x) \qquad (2)$$

Если *f(x)=0* , то

$$y^n + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots p_n(x) y = 0 \qquad (3)$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение.

§ 1.8 Теоремы о свойствах частных решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Если функция y_1 является решением уравнения (3), то и функция $C \cdot y_1$, есть решение этого уравнения.

Теорема 2. Если функции y_1 и y_2 являются решением уравнения (3), то и функция $y_1 + y_2$, есть решение этого уравнения.

Линейной комбинацией функций $y_1 \dots y_n$ называют выражения вида:
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$,где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

Теорема 3. Если $y_1 \dots y_n$ - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (3), то их линейная комбинация
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ есть также решение этого уравнения.

Определение 1. *Рассмотрим систему функций* $y_1, y_2 \dots y_n$ *определённых и непрерывных на одном и том же отрезке* $[a, b]$. *Эта система функций называется линейно зависимой на отрезке* $[a, b]$, *если существует* n *таких чисел* $\alpha_1 \dots \alpha_n$, *что выполняется соотношение:*

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad (4)$$

для всех x *на данном отрезке. При этом предполагают, что числа* $\alpha_1 \dots \alpha_n$ *не равны нулю одновременно.*

Линейная зависимость системы функций означает, что хотя бы одна из функций системы представляет собой линейную комбинацию остальных.

Определение 2. *Если функции системы* $y_1 \dots y_n$ *дифференцируемы (n-1) - раз, то из них можно построить определитель* n *- ого порядка вида:*

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Это определитель Вронского (ВВронскиа)

Теорема 4 Если $y_1 \dots y_n$ линейно независимые функции, удовлетворяющие некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению n - ого порядка, то вронскиан такой системы не обращается в нуль ни в одной точке.

Теорема 5. Если функции $y_1, y_2 \dots y_n$ - линейно зависимы, то вронскиан системы тождественно равен нулю.

Определение 3. *Систему частных решений $y_1 \dots y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n - ого порядка будем называть фундаментальной, если она состоит из n линейно независимых функций.*

Любое линейное однородное дифференциальное уравнение обладает бесконечным множеством фундаментальных систем.

Теорема (об общем решении линейных однородных дифференциальных уравнении) Если функции $y_1 \dots y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3), то их линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ является общим решением однородного уравнения.

§ 1.9 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Определение 1. *Линейное однородное дифференциальное уравнение вида:*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_n y = 0 \qquad (1)$$

в котором все коэффициенты $p_1 \dots p_n$ являются постоянными, есть линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Частные решения этого уравнения следует искать среди таких функций, которые в алгебраическом смысле подобны своим производным.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$, тогда:

$y' = ke^{kx}$

$y'' = k^2 e^{kx}$

…

$y^{(n)} = k^n e^{kx}$ подставив в уравнение, получим:

$k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{k\lambda x} + \dots p_n e^{kx} = 0$

$e^{kx}(k^n + k^{n-1} p_1 + \dots p_n) = 0$

$$e^{kx} f(k) = 0 \qquad (2)$$

где $f(k)$- характеристический многочлен данного дифференциального уравнения.

Функция e^{kx} тогда и только тогда удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянным коэффициентом (1), когда число *k* является корнем характеристического уравнения

$$f(k)=0 \qquad (3)$$

Возможно несколько случаев корней характеристического уравнения:

1) Все корни действительные и разные.

Имеем *n* действительных корней $k_1,...,k_n$, каждому соответствует частное решение: $\left.\begin{array}{l} k_1 \to y_1 = e^{k_1 x} \\ k_2 \to y_2 = e^{k_2 x} \\ k_n \to y_n = e^{k_n x} \end{array}\right\}$ фундаментальная система решений.

Общее решение: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... c_n e^{k_n x}$

Докажем, что функции $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, ..., $c_n e^{k_n x}$ являются фундаментальной системой решений.

Для этого составим из них определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & ... & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & ... & k_n e^{k_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & ... & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ k_1 & k_2 & ... & k_n \\ ... & ... & ... & ... \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & ... & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

2) Все корни различны, но среди них имеются комплексные.

Если $k = a + bi$ - один из корней, то

$\bar{k} = a - bi$ - комплексно-сопряжённый ему и им соответствуют

2 частных решения.

$$y_k = e^{(a+ib)x} \text{ и } y_s = e^{(a-ib)x}$$

Рассмотрим линейные комбинации этих решений, которые также являются решениями.

$$\tilde{y}_k = \frac{y_k + y_s}{2} \text{ и } \tilde{y}_s = \frac{y_k - y_s}{2}$$

Применим формулы Эйлера: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

тогда $\tilde{y}_k = \dfrac{e^{(a+ibx)} + e^{(a-ib)x}}{2} = e^{ax} \cdot \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = e^{ax} \cos bx$

$$\tilde{y}_s = \frac{e^{(a+ibx)} - e^{(a-ib)x}}{2} = e^{ax} \cdot \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} = e^{ax} \sin bx$$

аналогично $\tilde{y}_s = e^{ax} \sin bx$

т.е. паре комплексных корней $k_{1,2} = a \pm ib$ соответствуют решения $\begin{matrix} \tilde{y}_k = e^{ax} \cos bx \\ \tilde{y}_s = e^{ax} \sin bx \end{matrix}$

3) Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Если $\tilde{k}$ есть корень кратности s, то ему соответствуют s – линейно независимых решений: $y_1 = e^{\tilde{k}x}$

$$y_2 = xe^{\tilde{k}x}$$

...

$y_s = x^{s-1} \cdot e^{\tilde{k}x}$, при каждом совпадении корня в решение добавляется множитель x.

Пример 1. $y'' - 12y' + 35y = 0$

$k^2 - 12k + 35 = 0$

$k_1 = 5 \;\; k_2 = 7$

$$y_1 = e^{5x}, \; y_2 = e^{7x}$$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$

Пример 2. $y'' - 2y' = 0$

$k^2 - 2k = 0 \quad k_1 = 0 \;\; k_2 = 2$

$$y_1 = e^{0x} = e^0 = 1, \; y_2 = e^{2x}$$

$y = C_1 + C_2 e^{2x}$

Пример 3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0 \qquad k_{1,2} = 3$

$$y_1 = e^{3x}, \; y_2 = xe^{3x}$$

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

Пример 4. $y'' - 6y' + 25y = 0$

$k^2 - 6k + 25 = 0 \quad D = 36 - 100 = -64 \quad k_{1,2} = 3 \pm 4i$

$$y_1 = e^{3x} \cos 4x, \; y_2 = e^{3x} \sin 4x.$$

$y = C_1 e^{3x} \cos 4x + C_2 e^{3x} \sin 4x$

§ 1.10 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением называют уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots p_n(x) y = f(x) \qquad (1)$$

Теорема 6. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного.

$$y = Y_0 + \tilde{Y}.$$

Теорема 7. Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух функций $f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$. (принцип наложения)

Способ неопределённых коэффициентов.

Применяется для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения

Способ применим для уравнений с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части: показательные функции, синусы, косинусы, многочлены или их целые рациональные комбинации.

Частное решение следует искать в форме, аналогичной форме правой части.

Случай 1:

$f(x) = P_n(x)$-многочлен *n*-ной степени.

$\tilde{y} = Q_n(x)$ - если среди корней характеристического уравнения нет $k_i = 0$

$\tilde{y} = xQ_n(x)$ - если среди корней характеристического уравнения есть 1 корень $k_i = 0$

$\tilde{y} = x^{\alpha} \cdot Q_n(x)$, если среди корней есть $k_i = 0$, α - кратность корня

Q_n - многочлен степени n с неизвестными коэффициентами, которые находятся после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение (1).

Пример 1. $y'' + y' = 2x - 1$

$k_1 = 0 \quad k_2 = -1 \quad \alpha = 1$

$\tilde{y} = xQ_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

$\tilde{y}' = 2Ax + B$

$\tilde{y}'' = 2A$

$2A + 2Ax + B = 2x - 1$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$2A + B = -1 \Rightarrow B = -3$

$\tilde{y} = x(x - 3) = x^2 - 3x$

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$

Случай 2:

Вид правой части $f(x) = e^{ax}$ или более общий $f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$

Если a не является корнем характеристического уравнения для уравнения (1), то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y} = Q_n(x)\cdot e^{ax}$$

Если a - корень характеристического уравнения (1) то

$$\tilde{y} = x^{\alpha} Q_n(x) e^{ax} \quad \alpha \text{ - кратность корня}$$

За $Q_n(x)$ нужно взять многочлен с буквенными коэффициентами *n*-ой степени, коэффициенты определяются после подстановки y^* в уравнение (1).

Пример 2. $y'' - 2y' + y = x\cdot e^{3x} \quad k_1 = k_2 = 1 \neq 3$

$$\tilde{y} = e^{3x}(Ax + B)$$

$$\tilde{y}' = 3e^{3x}(Ax+B) + Ae^{3x} = e^{3x}(3Ax + 3B + A)$$

$$\tilde{y}'' = 3e^{3x}(3Ax+3B+A) + 3Ae^{3x} = e^{3x}(9Ax + 9B + 6A)$$

$$e^{3x}(9Ax+9B+6A) - 2e^{3x}(3Ax+3B+A) + e^{3x}(Ax+B) = xe^{3x}$$

$$9Ax + 9B + 6A - 2(3Ax+3B+A) + Ax + B = x$$

$$(9A - 6A + A)x + 9B + 6A - 6B - 2A + B = x$$

$$4Ax + 4B + 4A = x$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$4B + 4A = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \qquad \tilde{y} = \frac{1}{4}e^{3x}(x-1)$$

$$Y_0 = C_1e^x + C_2xe^x$$

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{4}e^{3x}(x-1)$$

Пример 3. $y'' - y = 2e^x \quad k_1 = 1 \;\; k_2 = -1 \;\; \alpha = 1$

$$\tilde{y} = e^x\cdot A\cdot x$$

$$\tilde{y}' = e^x\cdot A\cdot x + Ae^x$$

$$\tilde{y}'' = e^x\cdot A\cdot x + Ae^x + Ae^x$$

$$e^x\cdot A\cdot x + 2Ae^x - e^x\cdot A\cdot x = 2e^x$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = xe^x$$

$$Y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x$$

Случай 3:

$$f(x) = P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\cdot\sin bx \quad \text{,где}$$

$P_r(x)$ и $Q_s(x)$ $\rightarrow$ многочлены степени *r* и *s* соответственно.

Частное решение ищем в виде (если bi не корень характеристического уравнения)

$$\tilde{y} = P_m(x)\cdot\cos bx + Q_m(x)\sin bx$$

$$m = max(r,s)$$

Если bi - корень характеристического уравнения, то

$\tilde{y} = x^{\alpha}(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ α - кратность корня.

Пример 4

$$y'' + 4y' + 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

$$k_{1,2} = 2 \neq 2i$$

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+4(A\cos 2x + B\sin 2x) = 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

$$\cos 2x(-4A + 8B + 4A) + \sin 2x(-4B - 8A + 4B) =$$
$$= 2\sin 2x + 3\cos 2x$$

$$8B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{8}$$

$$-8A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$\tilde{y} = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x$$

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x$$

Пример 5. $y'' + 9y = 6\cos 3x - 30\sin 3x$ $k_{1,2} = \pm 3i$, $3i = b$

частное решение $\tilde{y} = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$

$$\tilde{y}' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$$

$$\tilde{y}'' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x +$$
$$+ x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9x(A\cos 3x + 9B\sin 3x) +$$
$$+9x(A\cos 3x + B\sin 3x) = 6\cos 3x - 30\sin 3x$$

$$-6A = -30 \Rightarrow A = 5$$

$$6B = 6 \Rightarrow B = 1$$

$$\tilde{y} = x(5\cos 3x + \sin 3x)$$

$$Y_0 = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$$

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + \sin 3x)$$

$A = 5$, $B = 1$

Случай 4:

$$f(x) = e^{ax}\cdot(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx)$$

$$\tilde{y} = x^{\alpha}e^{ax}(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

$\alpha = 0$ α=0 если среди корней характеристического уравнения нет числа

$z = a \pm bi$

$\alpha = 1$ α =1 если один из корней равен z

$\alpha = 2$ α =2 если 2 корня совпадают

Рассмотрим еще один пример решения линейного неоднородного уравнения:

Пример 6. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27 \qquad k_{1,2} = \pm 3i$

$$n = 4 \ \tilde{y} = Q_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

$$\tilde{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$$

$$\tilde{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + 9\left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right) =$$

$$= 9x^4 + 12x^2 - 27$$

$$x^4 \Big| \ 9A = 9 \Rightarrow A = 1$$

$$x^3 \Big| \ 9B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x^2 \Big| \ 12A + 9C = 12 \Rightarrow C = 0$$

$$x^1 \Big| \ 6B + 9D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$x^0 \Big| \ 2C + 9E = -27 \Rightarrow E = -3$$

$$\tilde{y} = x^4 - 3$$

$$Y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

$$y = Y_0 + \tilde{Y}$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x^4 - 3$$

§ 1.11 Метод вариации произвольных постоянных. (Метод Лагранжа)

Применим к любому виду неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Пусть известно общее решение соответствующего (1) однородного уравнения.

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad \text{,тогда}$$

решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x)$$ где от

функций $C_1(x) \ldots C_n(x)$ требуем, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \ldots y_n C_n' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + \ldots y_n' C_n' = 0 \\ \ldots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \ldots y_n^{(n-1)} C_n' = f(x) \end{cases}$$

Эта неоднородная система уравнений.

т.к. определитель системы есть вронскиан фундаментальной системы решений $\neq 0$, то система имеет единственное решение относительно $C_1' \ldots C_n'$.

Рассмотрим уравнение 2-ого порядка.

$$y''(x) + p(x) y' + q(x) = f(x)$$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система решений.

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} \qquad C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}$$

Пример 1. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$; $k^2-2k+1=0 \quad k_{1,2}=1$

$$y_1(x)=e^x \quad y_2(x)=xe^x$$

$$y=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x \quad W=\begin{vmatrix} e^x & e^x x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^x(e^x+xe^x)-e^{2x}=xe^{2x}$$

$$\Delta C_1'(x)=\begin{vmatrix} 0 & e^x x \\ \dfrac{e^x}{x} & e^x+xe^x \end{vmatrix}=-\frac{e^x\cdot x\cdot e^x}{x}=-e^{2x}$$

$$\Delta C_2'(x)=\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix}=\frac{e^{2x}}{x} \quad C_1{}'(x)=\frac{-e^{2x}}{xe^{2x}}=-\frac{1}{x} \quad C_2{}'(x)=\frac{\dfrac{e^{2x}}{x}}{xe^{2x}}=\frac{1}{x^2}$$

$$C_1(x)=-\int\frac{dx}{x}=-ln|x|+C_1$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C_2$$

$$y=(C_2-ln|x|)e^x+(C_4-\frac{1}{x})xe^x=C_1e^x+C_2xe^x-e^x\left(ln|x|-1\right)$$

§ 1.12 Системы линейных уравнений.

Для описания некоторых процессов и явлений требуется несколько функций.

Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Система дифференциальных уравнений n - ого порядка вида:

$$\begin{cases} y'=f_1(x,y_1...y_n) \\ y_2'=f_2(x,y_1...y_n) \\ ... \\ y_n'=f_n(x,y_1...y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

В векторной форме $\vec{y}=\overrightarrow{f(x,\vec{y})}$

Решение такой системы сводится к решению одного дифференциального уравнения n - ого порядка.

Решением системы (1) называется совокупность n функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$, удовлетворяющая всем уравнениям системы.

Нахождение решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие начальным условиям.

$y_1(x_0)=y_{10}$; $y_2(x_0)=y_{20}$ … $y_n(x_0)=y_{n0}$, где $x_0,y_0...y_{n0}$ - заданные числа называемые начальными данными, называется задачей Коши.

В прикладных задачах (физики, механики и пр.) независимая переменная очень часто интерпретируется как время (t).

Система тогда принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1 \ldots y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 \ldots y_n) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1 \ldots y_n) \end{cases}$$

Или в векторной форме $\dot{\vec{y}} = \overline{f(t, \vec{y})}$

Начальные условия $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

Пример 1.

Решение нормальной системы сведением к уравнению n -ого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$x = \dot{y} - y - 5e^{-t}$$

$$\dot{x} = \ddot{y} - \dot{y} + 5e^{-t}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + 5e^{-t} = 5\left(\dot{y} - y - 5e^{-t}\right) - 3y + 2e^{3t}$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 4$$

$$y_0(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = 2e^{3t} \quad \tilde{y}_1 = Ae^{3t}$$

$$f_2(x) = -30e^{-t} \quad \tilde{y}_2 = Be^{-t}$$

$$\dot{\tilde{y}}_1 = 3Ae^{3t} \quad \dot{\tilde{y}}_2 = -Be^{-t}$$

$$\ddot{\tilde{y}}_1 = 9Ae^{3t} \quad \ddot{\tilde{y}}_2 = Be^{-t}$$

$$9Ae^{3t} - 18Ae^{3t} + 8Ae^{3t} = 2e^{3t}$$

$$A = -2 \quad \tilde{y}_1 = -2e^{3t}$$

$$Be^{-t} + 6Be^{-t} + 8Be^{-t} = -30e^{-t}$$

$$15B = -30 \quad B = -2 \quad \tilde{y}_2 = -2e^{-t}$$

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}$$

$$\dot{y} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 6e^{3t} + 2e^{-t}$$

$$x = \dot{y} - y - 5e^{-t}$$

$$x = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 6e^{3t} + 2e^{-t} - \left(C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}\right) - 5e^{-t}$$
$$x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$$

Выражения, представляющие собой конечные соотношения между искомыми функциями и независимыми переменными называют первыми интегралами системы.

Знание интегралов облегчает решение задачи, каждый первый интеграл позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

§ 1.13 Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Нормальная система дифференциальных уравнений (1) называется линейной, если функции $f_1 \ldots f_n$ - линейны относительно искомых функций.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ &\frac{dy_2}{dx} = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2 \\ &\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = a_{1n}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

причём Все коэффициенты (A_{ij}) и (b_i) - вообще говоря, являются произвольными функциями от x.

Если $b_1 \ldots b_n = 0$, то система (2) называется однородной, если нет неоднородной.

Пусть $(a_{ij}) = const$, тогда система (2) – линейная система с постоянными коэффициентами , пусть также $b_1, \ldots, b_n = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ &\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, поэтому будем искать решение (3) в виде показательных функций.

Частное решение системы (3) ищем в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x} \ ; \ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x} \ ; \ \ldots \ ; \ y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \qquad (4)$$

где, $\gamma_1 \ldots \gamma_n$, λ - постоянные, которые следует подобрать так, чтобы функции (4) удовлетворяли системе (3). Подставим (4) в (3), тогда

$$\begin{cases} \lambda\gamma_1 e^{\lambda x} = a_{11}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{12}\gamma_2 e^{\lambda x} + \ldots a_{1n}\gamma_n e^{\lambda x} \\ \lambda\gamma_2 e^{\lambda x} = a_{21}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{22}\gamma_2 e^{\lambda x} + \ldots a_{2n}\gamma_n e^{\lambda x} \\ \ldots \\ \lambda\gamma_n e^{\lambda x} = a_{n1}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{n2}\gamma_2 e^{\lambda x} + \ldots a_{nn}\gamma_n e^{\lambda x} \end{cases}$$

сокращаем на $e^{\lambda x}$ и переносим всё вправо

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\gamma_1+a_{12}\gamma_2+...+\gamma_{1n}\gamma_n=0\\ a_{21}\gamma_1+(a_{22}-\lambda)\gamma_2+...+\gamma_{2n}\gamma_n=0\\ ...\\ a_{n1}\gamma_1+...+(a_{nn}-\lambda)\gamma_n=0\end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) – однородная система линейных уравнений из n - уравнений с n - неизвестными. Чтобы система имела решение необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

Характеристическое уравнение системы (3).

Решим систему с использованием её характеристического уравнения.

Каждому простому (действительному) корню λ, соответствует решение вида:

$$y_1^{(i)}=\gamma_1^{(i)}e^{\lambda_i x}\ ;\ y_2^{(i)}=\gamma_2^{(i)}e^{\lambda_i x}\ ;\ ...\ ;\ y_n^{(i)}=\gamma_n^{(i)}e^{\lambda_i x} \qquad (7)$$

Удобнее представить решение в виде вектора:

$$\lambda_i\to\overrightarrow{y^{(i)}}=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(i)}\\ \gamma_2^{(i)}\\ \cdots\\ \gamma_n^{(i)}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_i x}$$

Ограничимся случаем, когда все корни характеристического уравнения действительные и разные. Подставим решение вида (7) в уравнение (3) и сократим $e^{\lambda_i x}$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_i)\gamma_1^{(i)}+a_{12}\gamma_2^{(i)}+...+a_{1n}\gamma_n^{(i)}=0\\ a_{21}\gamma_1^{(i)}+(a_{22}-\lambda_i)\gamma_2^{(i)}+...+a_{2n}\gamma_n^{(i)}=0\\ ...\\ a_{n1}\gamma_1^{(i)}+a_{n2}\gamma_n^{(i)}+...+(a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n^{(i)}=0\end{cases}$$

Эта однородная система уравнений, определитель которой не равен нулю. Поэтому она имеет бесконечное множество решений. Достаточно найти одно решение, (значения коэффициентов $\gamma_1^{(i)}...\gamma_n^{(i)}$). Эти коэффициенты находят для каждого корня характеристического уравнения λ_i

Все частные решения вида (7) образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация всех частных решений с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение системы.

В векторной форме оно будет записано в форме:

$$\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}C_i\overrightarrow{y^{(i)}}=C_1\overrightarrow{y^{(1)}}+C_2\overrightarrow{y^{(2)}}+\cdots+C_n\overrightarrow{y^{(n)}}$$

$$\begin{cases} y_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_1^{(i)} \\ \dots \\ y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_n^{(i)} \end{cases}$$

Пример 1.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$$

γ_1^1, γ_2^1 находим из решения системы $\qquad \gamma_1^2, \gamma_2^2$ находим из решения системы

$$\begin{cases} 5\gamma_1^1 - 5\gamma_2^1 = 0 \\ 1\gamma_1^1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1^1 = 1 \\ \gamma_2^1 = 1 \end{cases} \quad \overrightarrow{y^{(1)}} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \quad \begin{cases} 1\gamma_1^2 - 5\gamma_2^2 = 0 \\ \gamma_1^2 - 5\gamma_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1^2 = 5 \\ \gamma_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{y^{(2)}} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$$

$$\vec{y} == C_1 \overrightarrow{y^{(1)}} + C_2 \overrightarrow{y^{(2)}}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \end{cases} \quad \leftarrow \text{общее решение.}$$