Введение в дискретную математику.
Теория множеств.

Под **множеством** понимается некоторая, вполне определенная совокупность объектов произвольной природы.

Это не определение понятия множества. Будем считать его не определенным, но интуитивно понятным.

Будем считать множество заданным, если его элементы однозначно определены. То есть о всяком объекте можно сказать принадлежит он к данному множеству или нет.

Обозначение: A, B, C, … (прописные буквы).

Объекты, образующие множество – **элементы множества**. Обозначаются: a, b, с.

Примеры множеств: Множество людей с определенными свойствами (в данной комнате), множество целых чисел, множество гласных букв.

Запись элементов, входящих в множество: $\{1, 2, 3, 4\}$.

<u>Способы задания множеств.</u>

1. Перечислением всех, входящих в него объектов (элементов множества).
2. Описанием свойств, которыми должны обладать элементы множества.

$C = \{1, 8, 27, \cdots, k^3, \cdots\}$ - множество кубов всех положительных чисел.

То есть множество задается путем указания характеристического свойства, т. е. свойства, которому удовлетворяют элементы множества и только они.

Форма записи: $\{x$: x обладает свойством $P\}$

Определение 1. Если a есть один из объектов множества A, говорим что $a \in A$ (a принадлежит A). Если a не является элементом A, записываем $a \notin A$.

Определение 2. Множество A есть подмножество множества B (обозначается $A \subset B$) , если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то есть если $x \in A$ то $x \in B$.

В частности каждое множество есть подмножество самого себя.

Множества равны, если содержат одни и те же элементы.

Определение 3. Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что A равно B ($A = B$) если $\forall x$ имеем: $x \in A$ тогда и только тогда когда $x \in B$.

Определение 4. Пустое множество ($\varnothing$) или ($\{\}$), есть множество которое не содержит элементов. Универсальное множество $\boldsymbol{U}$ (универсум) есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Операции над множествами.

Определение 1. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A и B. Обозначение: $A \bigcap B = \{x : x \in A\, и\, x \in B\}$. Пересечение множеств = операция произведения.

Определение 2. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначение: $A \bigcup B = \{x : x \in A\, или\, x \in B\}$

Объединение множеств = операция сложения множеств (сумма).

Определение 3. Пусть A и B – множества. Разностью множеств A – B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержаться в B.

Обозначение: $A \setminus B = \{x : x \in A \quad и \quad x \notin B\}$

Определение 4. Дополнение множества A ($\overline{A}$) – это множество элементов универсума, которые не принадлежат A.

$$\overline{A} = U - A = U \setminus A$$

$$\overline{A} = \{x : x \in U \quad и \quad x \notin A\}$$

Операции над множествами хорошо изображаются графически с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

Контур – ограничивает символически элементы множества
Рамка – ограничивает все элементы пространства (универсум).
$A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$

Свойства теоретико-множественных операций.

1. Свойства пустого множества: $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup \varnothing = A$.
2. Идемпотентность: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$.
3. Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
4. Ассоциативность: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
5. Дистрибутивность: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. Законы поглощения: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap \cup) = A$.
7. Законы де Моргана: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Через дополнение: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Определение. Количество элементов в множестве *A* называется его **мощностью** (или размером) и обозначается $|A|$.

Мощность конечного множества – натуральное число.
Для бесконечных множеств понятие мощности не вводим.

Определение. Множества, элементы которого можно поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами, называется **счетными**. Бесконечные множества, не являющиеся счетными называют **несчетными**.

Пример. Множество целых чисел ***Z***- счетно. Множество действительных чисел ***R*** – несчетно.

Определение. Для данного множества *A* можно рассмотреть множество всех его подмножеств, включая пустое множество и само *A*, которое называют **булеан** или **множество-степень**. Обозначение: $\mathcal{P}(A)$ или 2^n.

Пример: У множества $A=\{1, 2, 3\}$ – 8 подмножеств.
$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Определение: **Декартово произведение** двух множеств *A* и *B* определяется как множество всех упорядоченных пар, у которых первый элемент принадлежит *A*, второй – *B*. Обозначение: $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Пример: $A = \{a, b\}$; $B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c)\}$$

Для конечных множеств: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Аналогично можно определить декартово произведение *n* множеств: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, а также декартову степень - $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n}$.

Определение. Бинарным отношением *R* между элементами множеств *A* и *B* называется подмножество декартова произведения $A \times B$.

Если $(a, b) \in R$, это записывается *aRb*, при этом говорят, что *a* и *b* находятся в отношении *R*, или просто *a* относится к *b*.

Пример: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{r, s\}$/

$$A \times B = \{(1, r); (2, r); (3, r); (1, s); (2, s); (3, s)\}.$$

Тогда $R = \{(1, r); (1, s); (3, s)\}$ - есть отношение множеств *A* и *B*.

Можно также записать - 3*Rs*.

В множестве $A \times B$ 6 элементов, число подмножеств $2^6 = 64$. То есть существует 64 отношения на $A \times B$.

Определение. Пусть даны 2 множества *A* и *B*. **Функцией**, отображающей *A* в *B*, называется бинарное отношение $f \subset A \times B$, обладающее таким свойством: $\forall a \in A \exists$ ровно одно $b \in B$, для которого $(a, b) \in f$.

Множество *A* называют *областью определения функции*, а множество *B* – *областью потенциальных значений*.

Функция f: $A \to B$ называется также отображением; при этом говорят что *f* отображает *A* в *B*. Записывают *b* = *f* (*a*) (элемент *a* отображается в элемент *b*). Или *b* называют образом элемента *a*.

Элементы комбинаторики.

Комбинаторика – наука о конечных множествах и отображениях конечных множеств.

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах (числа комбинаций).

Основной вопрос комбинаторики: Сколько…?

Применение комбинаторики: теория вероятностей, теория информации, экономика, социология и т.д.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Число всевозможных перестановок из *n* элементов обозначают через P_n.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Для пустого множества принято соглашение, что оно может быть упорядочено только одним способом, то есть 0!=1.

Пример 1: Существует 6 перестановок множества *S* = {*a*, *b*, *c*}

Abc, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. 3! =6

Размещениями называют множества, составленные из *n* различных элементов по *m* элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1).$$

Пример 2. Дано множество *A* = {*a*, *b*, *c*, *d*}. Сколько существует последовательностей из 2 –х элементов этого множества?

$n = 4 \quad m = 2$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot 3 = 12$$

Ab, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*

Сочетаниями из *n* различных элементов по *m* называются множества, содержащие *m* элементов из числа *n* заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из *n* по *m* обозначают C_n^m. Это число можно найти по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 3. У множества $\{a, b, c, d\}$ из 4-х элементов имеется 6 2-х элементных подмножеств.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Это $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

Комбинаторные формулы с повторениями элементов.

Все приведенные формулы справедливы в том случае, когда все n элементов множества различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам.

Если среди n элементов есть n_1 элементов 1-го вида, n_2 - 2-го вида и т. д., тогда число перестановок с повторениями определяется формулой:

$$P_n(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно

$$\left(A_n^m\right)_{с\ повт} = n^m.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по m элементов.

$$\left(C_n^m\right)_{с\ повт} = C_{n+m-1}^m$$

Число перестановок, размещений и сочетаний (без повторений) связано формулой

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Комбинаторный принцип суммы.

Если в некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Комбинаторный принцип произведения.

Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 4. Сколькими различными способами можно установить график дежурств 6 человек? Сколькими способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Порядок дежурства 6 человек может быть установлен 6! способами.

5 человек на скамейке могут расположиться 5! способами. Это перестановки.

Пример 5. Сколькими способами можно выбрать 3-х студентов на три различные должности из 10 кандидатов?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Сколькими способами можно распределить 3 разные путевки на 5 человек?

$$A_{15}^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Пример 6. Сколькими способами можно выбрать 3 делегата на конференцию из 10 человек?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{720}{6} = 120$$

Сколькими способами можно распределить 3 одинаковых путевок на 5 человек?

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 2} = \frac{60}{12} = 5$$

Пример 7. Из 25 студентов 10 девушек. На соревнования отправляют 3-х юношей и 2 девушки. Сколько команд можно сформировать?

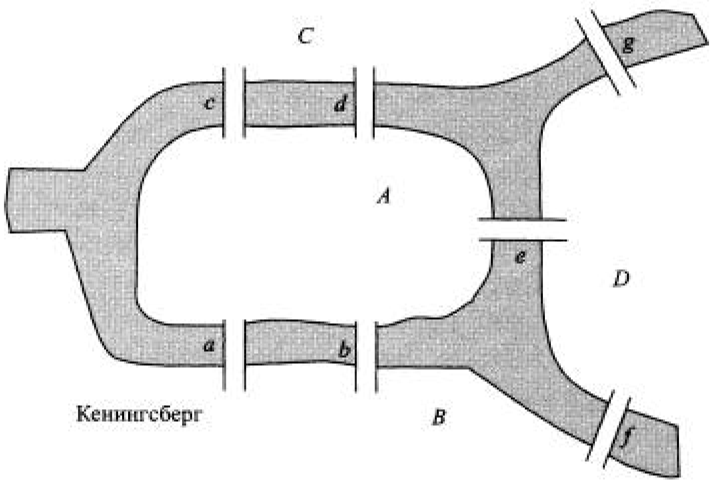
Число способов выбрать 3-х юношей из 15 - $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$, число способов выбрать 2-х девушек из 10 - $C_{10}^2 = 45$. По правилу произведения общее число команд - $C_{15}^3 \cdot C_{10}^2 = 20475$.

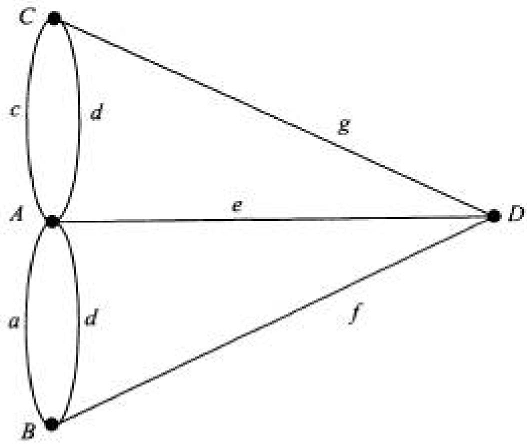
Пример 8. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

$$P_6(3,3) = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 20$$

Введение в теорию графов.

История создания: Л.Эйлер разработал основы теории графов когда решал задачу о разработке замкнутого маршрута по мостам г.Кенигсберга Он обозначил каждую часть суши точкой а каждый мост линией их соединяющей. В результате был получен граф. Эйлер доказал, что задача не имеет решения.





Определение 1. Граф есть конечное множество *V*, называемое **множеством вершин** и множество *E* двухэлементных подмножеств множества *V*. Множество *E* – **множество ребер**. Элемент множества *E* называется **ребром**.

Обозначение: $G(V, E)$

Элементы a и b множества *V* называются **соединенными** или **связанными** ребром {a, b}, если $\{a, b\} \in E$.

То есть граф задан, если на плоскости задано множество вершин и множество соединяющих их дуг.

Конечный граф изображают в виде диаграммы, на которой вершины обозначаются точками, а ребра, соединяющие две вершины, - линиями между этими точками.

Пример 1. Граф с множеством вершин V = {a, b, c} и множеством ребер E = {{a, b}, {b, c}} можно изобразить:

Определение 2. Если $\{a, b\}$ – ребро, тогда вершины *a* и *b* называются **концами** ребра $\{a, b\}$. Ребро $\{a, b\}$ называют также **инцидентным** к вершинам *a* и *b*. Обратно говорят, что вершины *a* и *b* инцидентны к ребру $\{a, b\}$. Две вершины называют **смежными** если они являются концами ребра, или, что тоже самое, если они инцидентны к одному ребру. Два ребра называются **смежными**, если они инцидентны к общей вершине.

Пример 2. Дан граф $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Диаграмма:

Все вышесказанное относится к простым графам. В них существует только одно ребро между вершинами.

Рассмотрим некоторые типы графов более общего вида.

Ребро, которое соединяет вершину саму с собой, называется **петлей**. Если в графе допускается наличие петель, то это **граф с петлями**.

Если в графе допускается наличие более одного ребра между двумя вершинами, то он называется – **мультиграф**.

Определение 3. Степенью вершины v (deg(v)), называется количество ребер, инцидентных этой вершине.

Вершина степени 0 – **изолированная.**

Замечание. Теория графов является молодым разделом математики и поэтому многие термины еще не до конца устоялись и во многих книгах можно встретить разные названия одного и того же.

Можно называть степень вершины **валентностью**.

Пример 3. Вершины: *a* и *f* – степень 3 *b*, *c*, *d* – степень 2.

Теорема. Сумма степеней вершин графа всегда четна.

Определение 4. Граф $G'(V', E')$ называется подграфом графа $G(V, E)$, если $V' \subset V$ и $E' \subset E$. Таким образом каждая вершина в G' является вершиной в G, и каждое ребро в G' является ребром в G.

Определение 5. **Путем** в графе G называется такая последовательность дуг, в которой начало каждой последующей дуги, совпадает с концом предыдущей. **Длиной пути** называют число входящих в этот путь дуг.

Определение 6. Граф называется **связным**, если имеется путь между любыми двумя его различными вершинами.

Определение 7. Пусть $G = G(V, E)$ – граф. Циклом называется путь ненулевой длины, соединяющий вершину саму с собой и не содержащий повторяющихся ребер. Простым циклом называется цикл, соединяющий вершину v саму с собой и не содержащий повторяющихся вершин, кроме v.

Определение 8. Граф $G = G(V, E)$ называется **ориентированными графом** или **орграфом**, если в нем указано направление дуг. То есть если множество E состоит из упорядоченных пар элементов из V.

Определение 9. **Дерево** это конечный, связный, не ориентированный граф, не имеющий циклов.

Определение 10. Пусть G – граф. Пусть B – матрица, строки которой обозначены вершинами графа, а столбцы обозначены ребрами графа. Будем считать, что вершины и ребра графа пронумерованы. Элемент i – ой строки и j – ого столбца матрицы B, обозначаемый B_{ij}, равен 1 если i – ая вершина инцидентна j – ому ребру, и равен 0 в противном случае. Матрица B называется матрицей инцидентности графа G.

$v_1 e_1$

Пример 4.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \end{array}$$

Определение 11. Пусть G – граф. Пусть B – матрица, строки которой обозначены вершинами графа и столбцы обозначены теми же вершинами в том же самом порядке. Будем считать, что вершины и ребра графа пронумерованы. Элемент i – ой строки и j – ого столбца матрицы B, обозначаемый B_{ij}, равен 1 если имеется ребро из i – той вершины в j –тую вершину, и равен 0 в противоположном случае. Матрица B называется **матрицей смежности** графа G.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array}$$

Элементы математической логики.

Логические представления – описание исследуемой системы, процесса, явления в виде совокупности ***сложных высказываний***, составленных из ***простых*** (***элементарных***) высказываний и ***логических связок*** между ними.

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений. Простейшую из формальных логических теорий называют алгеброй высказываний.

Основные понятия.

Высказывание – основное математическое понятие и оно не определимо.

Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Иными словами, утверждение об истинности или ложности высказывания должно иметь смысл.

Примеры: 2x2=4 – истинное высказывание.

Москва – столица Замбии. – ложное высказывание.

x – вещественное число. – не является высказыванием, так как судить об истинности или ложности невозможно.

В математической логике интересуются не содержанием, а истинностью (ложностью) высказываний. Истинное обозначают И(Т), ложное – Л (F). Вместо символов И или Л используют логические значения высказываний в виде символов 1 и 0, что соответствует алгебре высказываний в виде ***двоичной*** (или ***булевой***) алгебры, заданной на множестве двух элементов: 0, 1.

Обозначение: буквами латинского алфавита – p, q, r …

Например, утверждение p: завтра будет дождь, q: квадрат целого числа есть число положительное.

Высказывания p и q – простые высказывания.

Из простых высказываний с помощью логических связок «и», «или», «не», «если …то», «только если», «тогда и только тогда» можно образовать новые высказывания.

Высказывание, не содержащее связок, называется ***простым***, высказывание, содержащее связки – ***сложным***.

Примеры простых высказываний: p: Катя водит машину, q: у Коли русые волосы.

Сложное: Катя водит автомобиль и у Коли русые волосы. Объединяются связкой «и».

Обозначение: $\wedge$.

Выражение $p \wedge q$ называют ***конъюнкцией*** (логическим умножением) высказываний p и q.

Катя водит автомобиль или у Коли русые волосы. p или q ($p \vee q$) – называют ***дизъюнкцией*** (логическим сложением).

Опровержение или отрицание высказывания p обозначается: $\overline{p}$, ¬ p ($\sim p$).

$\neg p$ – Катя не водит автомобиль.

Дизъюнкция, конъюнкция и отрицание – одноместные логические операции. (Они называются ***булевыми*** в честь Дж. Буля).

Действия этих операций задаются ***таблицами истинности***.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Символы $\vee$ и $\wedge$ называют ***бинарными*** связками, символ ¬ – ***унарная*** связка, так как применяется только к одному высказыванию.

Рассмотрим высказывание: Коля выплатит кредит за машину или он утратит машину и будет ходить на работу пешком.

p : Коля выплатит кредит.

q : Коля останется с машиной.

r : Коля будет ходить на работу пешком.

Наше высказывание будет представлено в виде: $p \vee ((\neg q) \wedge r)$.

Таблица истинности дает возможность однозначно указать те ситуации, когда высказывание является истинным.

Случай	p	q	r	$\neg q$	$(\neg q) \wedge r$	$p \vee ((\neg q) \wedge r)$
1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0
7	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	1	0	0

Наш случай это 7. Если Коля не выплатит кредит (p – ложно), лишится машины (q – ложно) и будет ходить на работу пешком (r – истинно). Это совершенно истинное высказывание.

Условные высказывания.

Пример: Если Дмитрий закончит семестр на одни пятерки, то родители купят ему машину.

Если p то q. Записывается $p \to q$. p – посылка, q – заключение. Символ $\to$ - ***импликация*** (следование).

Таблица истинности для операции импликации (условной связки).

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Может показаться, что $p \to q$ носит характер причинно следственных связей, но это не является необходимым.

Пример. p: Катя водит машину, q: у Коли русые волосы.

Если p то q: $p \to q$ – это истинно, хотя то, что Катя управляет автомобилем, никак не связано с русыми волосами Коли.

Рассмотрим высказывание: $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Оно обозначается: $p \leftrightarrow q$.

$\leftrightarrow$ - ***эвиваленция***, это логическая операция соответствующая конструкции «…тогда и только тогда, когда …» (для выполнения p необходимо и достаточно выполнение q).

Из определения вытекает, что эквиваленция истинна только в случае, когда p и q имеют одинаковые истинностные значения.

Таблица истинности для операции эквиваленции:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Эквивалентные высказывания.

Особый интерес представляют сложные высказывания, имеющие различное строение, но являющиеся истинными в одних и тех же случаях. Такие высказывания называют ***логически эквивалентными***. Эквивалентность двух высказываний легко установить посредством сравнения их таблиц истинности.

Пример. p: Сегодня шел дождь, q: сегодня шел снег.

Сложное высказывание: Неверно, что сегодня шел дождь или снег. $\neg(p \vee q)$.

Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег. $\neg p \wedge \neg q$

Таблицы истинности:

p	q	$\neg$	$p \vee q$	$\neg p$	$\wedge$	$\neg q$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1

Во всех строках истинностные значения совпадают. Это означает, что 2 рассматриваемых высказывания логически эквивалентны.

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Используя таблицы истинности можно доказать следующие логические эквивалентности:

1. Закон идемпотентности:

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$

2. Закон двойного отрицания: $\neg(\neg p) \equiv p$.

3. Свойство коммутативности:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

4. Свойство ассоциативности:

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

5. Свойство дистрибутивности:

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6. Закон де Моргана:

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

7. Поглощение:

$p \wedge (p \wedge q) \equiv p$

$p \vee (p \vee q) \equiv p$

8. Действия с логическими константами 0 и 1:

$p \wedge 0 \equiv 0$

$p \vee 0 \equiv p$

$p \wedge 1 \equiv p$

$p \vee 1 \equiv 1$

Закон противоречия: $p \wedge \overline{p} \equiv 0$.

Закон исключенного третьего: $p \vee \overline{p} \equiv 1$

Часть этих закономерностей аналогичны обычной алгебре чисел, другие не имеют аналогий.

Высказывание истинное во всех случаях называется ***логически истинным*** или ***тавтологией***. Высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется ***логически ложным*** или ***противоречием***.

Примеры. Теоремы в математике – тавтология, он сдаст или не сдаст экзамен – тавтология (каждое высказывание вида $p \vee \neg p$ – тавтология).

Используя законы сложения и умножения высказываний, решим задачу.

Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это черный «Крайслер», а Смит, что это был «Форд» и что он не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них верно указал либо автомобиль, либо его цвет. Какой марки и какого цвета был автомобиль?

Решение:

Обозначим высказывания:

a: машина синего цвета,

b: машина «Бьюик»,

c: машина черного цвета,

d: машина «Крайслер»,

e: машина «Форд».

Из показаний Брауна: $a + b = 1$, из показаний Джонса: $c + d = 1$, из показаний Смита: $\neg a + e = 1$. Произведение 3-х этих высказываний истинно.

$$p = (a+b)(c+d)(\overline{a}+e) = (ac+bc+ad+bd)(\overline{a}+e) =$$

$$= ac\overline{a} + ace + ad\overline{a} + ade + bc\overline{a} + bce + bd\overline{a} + bde = 1$$

Из условий задачи легко установить, что все высказывания ложны кроме $bc\overline{a}$. Таким образом, преступники скрылись на черном «Бьюике».