Функции нескольких переменных.

Во многих вопросах геометрии, естествознания и пр. дисциплин приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных.

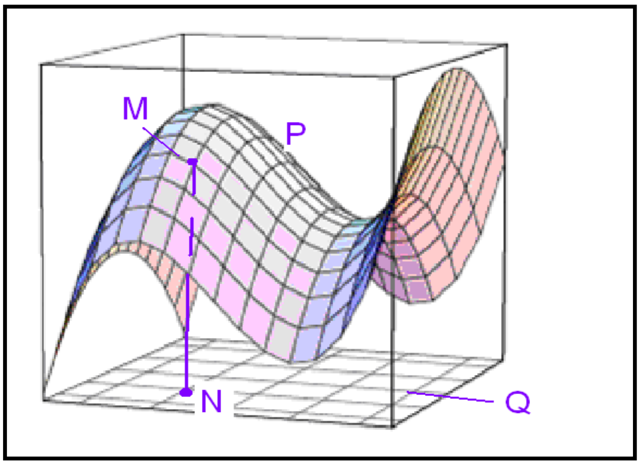
Примеры: 1. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}a\cdot h$, где a – основание, h - высота.(Это функция 2 – х переменных.)

2. Объем прямоугольного параллелепипеда $V=x\cdot y\cdot z$, где x, y, z - длина, ширина и высота соответственно. (Функция от 3 – х переменных.)

3. Сила притяжения двух материальных точек m_1 и m_2, занимающих положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$: $F=\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, где γ – гравитационная постоянная. (Функция от 6 - ти переменных.)

Строго говоря, почти каждая физическая зависимость дает пример функции большого числа переменных.

<u>Определение.</u> Рассматриваем множество E пар чисел (x, y). (Имеются в виду упорядоченные пары. То есть 2 пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.) Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y)\in E$ приведено в соответствие число z, то говорят что этим определена на множестве E функция $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y.



Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует точка координатной плоскости, то можно говорить, что функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

<u>Геометрическим изображение (графиком)</u> функции двух переменных $z = f(x, y)$ является, вообще говоря, поверхность в пространстве $Oxyz$. То есть каждой паре значений $(x, y)\in Q$ будет соответствовать точка $M(x, y, z(x, y))\in P$ и функция опишет в пространстве некоторую поверхность P, «нависающую» над областью Q.

Аналогично можно определить функции трех и более переменных.

Для функции 3 – х переменных: Если каждой тройке чисел из E ($(x, y, z)\in E$) в силу некоторого закона поставлено в соответствие число u, то говорят, что этим на E определена функция $u = f(x, y, z)$.

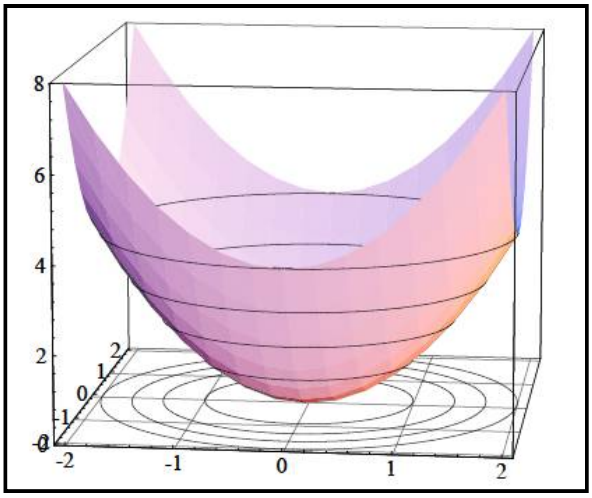
Пример: переменная масса (плотность) тела, температура неравномерно нагретого тела.

Обобщим все для случая n переменных.

Рассмотрим множество E упорядоченных систем из n чисел ($x_1, x_2, \cdots, x_n$). Если каждой точке в такой системе соответствует число u, то говорят, что u есть функция от n переменных. $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Замечание: Всякая функция многих переменных становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать (придать им постоянные значения).

Если придать постоянные значения C функции от двух переменных то мы получим ***линии уровня***: $f(x, y) = C$. Геометрически они будут означать сечение поверхности плоскостями $z = C$. В случае функции трех переменных аналогично получим ***поверхность уровня***: $f(x, y, z) = C$.



Будем излагать дифференциальное исчисление функций многих переменных в основном для функций двух переменных. Полученные результаты по аналогии легко распространить на случай большего числа переменных.

Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции.

Будем рассматривать пространство (плоскость) R_2 точек (x, y). Зададим в R_2 точку (x_0, y_0). Множество точек (x, y) координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2$ называется ***открытым кругом*** радиуса a с центром в точке (x_0, y_0). Множество точек (x, y) координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x-x_0|<a$; $|y-y_0|<b$ называется ***открытым прямоугольником.*** Если $a = b$, то это ***открытый квадрат***.

Любой открытый круг радиуса $\varepsilon > 0$ или квадрат со стороной 2ε с центром в (x_0, y_0) называется ε – окрестностью этой точки.

<u>Определение.</u> Функция $f(x, y)$ имеет предел в точке (x_0, y_0) равный числу A $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$, если она определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), за исключением быть может самой этой точки и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$такое, что неравенство $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ выполняется для всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$. (Из δ – окрестности точки (x_0, y_0)).

<u>Определение.</u> Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных. Дадим переменной x приращение Δx, оставляя y неизменной. Тогда разность $\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$ называется ***частным приращением функции f(x, y) по переменной x.*** Аналогично частное приращение по переменной y - $\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$.

Если обе переменные получили приращения Δx, Δy то $\Delta f(x, y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ называется ***полным приращением функции f(x, y)*** или просто ***приращением функции.***

Сразу отметим, что полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений этой же функции.

$$\Delta z \neq \Delta_x z+\Delta_y z$$

<u>Определение.</u> Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если

1) Функция определена в данной точке;
2) Бесконечно малым приращениям $\Delta x = x-x_0$ и $\Delta y = y-y_0$ переменных x и y соответствует бесконечно малое приращение $\Delta f(x, y)$ функции $f(x, y)$ при любом способе стремления Δx и Δy к нулю, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x, y)=0$$

Эквивалентное определение непрерывности функции в точке.

Так как $\Delta f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, где $x_0 + \Delta x = x$ и $y_0 + \Delta y = y$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция $f(x, y)$ называется ***непрерывной в данной области***, если она непрерывна в каждой точке данной области.

Частные производные первого порядка.

Определение. Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Будем предполагать, что функция определена для каждой рассматриваемой точки (x, y) в некоторой окрестности. Рассмотрим отношение частного по x приращения функции $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ к приращению Δx этой переменной. Если существует предел $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, f'_x.

Аналогично определяется частная производная по y: $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Определение. Частной производной функции от нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Правило дифференцирования функций двух и более переменных: Частная производная функции от нескольких переменных равна производной той функции одной переменной, которая получится, если все независимые переменные данной функции, кроме соответствующей одной, считать постоянными, то есть $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}[f(x, y)]$, где $y = const$.

Все правила дифференцирования функций многих переменных совпадают с правилами дифференцирования функции одной переменной.

Примеры: 1. $z = x^3 \sin y + y^4$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3$.

2. $u = x^6 + y^3 + 3z^5$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^5$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 15z^4$.

3. $z = \ln(x^3 + 2y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x^3 + 2y} \cdot 3x^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x^3 + 2y} \cdot 2$.

4. $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

5. $u=\sqrt{x+y^2+z^3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}\cdot 3z^2=\frac{3z^2}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

Формула полного приращения.

Пусть $z=f(x, y)$ есть функция от двух переменных непрерывная и имеющая в каждой точке x, y обе частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, которые также являются непрерывными функциями.

Зафиксируем точку с координатами x, y. Дадим в данной точке приращения аргументам Δx и Δy. Найдем приращение функции Δz.

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]=$$

Применяем теорему Лагранжа.

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f'_x(x^*,y+\Delta y)\cdot\Delta x$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_y(x,y^*)\cdot\Delta y$$

$$x^*\in[x,x+\Delta x]\quad y^*\in[y,y+\Delta y]$$

$$=f'_x(x^*,y+\Delta y)\cdot\Delta x+f'_y(x,y^*)\cdot\Delta y=$$

Если $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ то $x^*\to x$ и $y^*\to y$.

Ввиду непрерывности первых производных

$$f'_x(x^*,y+\Delta y)\to f'_x(x,y)$$

$$f'_y(x,y^*)\to f'_y(x,y)$$

$$f'_x(x^*,y+\Delta y)=f'_x(x,y)+\alpha\quad \alpha\to 0$$

$$f'_y(x,y^*)=f'_y(x,y)+\beta\quad \beta\to 0$$

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

Обозначим $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho$

$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\cdot\rho=\varepsilon\cdot\rho$, где $\varepsilon=\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}$.

Так как $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$ и $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$ то $|\varepsilon|=\left|\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right|=\left|\alpha\dfrac{\Delta x}{\rho}+\beta\dfrac{\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha|+|\beta|$.

При $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ $\rho\to 0$, а также $\varepsilon\to 0$.

$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\varepsilon\cdot\rho$, где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$.

Получили формулу полного приращения.

Полный дифференциал функции нескольких переменных.

Определение 1. Под дифференциалом независимой переменной понимается приращение этой переменной, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Определение 2. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y называется главная линейная часть полного приращения этой функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Пример. $z = x^2 \sin(y^3)$

$$dz = \left(2x\sin(y^3)\right)dx + \left(x^2\cos(y^3)\cdot 3y^2\right)dy$$

Для малых приращений аргументов Δx и Δy приращение функции Δz приближенно равно ее дифференциалу (точность тем выше, чем меньше приращения аргументов).

$\Delta z \cong dz$.

Это можно использовать для приближенного вычисления значений функции.

$$z(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = z(x,\ y) + z'_x\Delta x + z'_y\Delta y\ .$$

Пример. Найти значение функции $z = 2x^2y + 3xy + 1$ в точке (2,01; 1,002).

$x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$.

$z(2, 1) = 15$, $z'_x = 4xy + 3y$, $z'_y = 2x^2 + 3x$, $z'_x(2,1) = 11$, $z'_y(2,1) = 14$

$$\Delta z \cong dz = 11\cdot 0{,}01 + 14\cdot 0.02 = 0{,}39$$

$$z(2{,}01; 1{,}02) \approx 15 + 0{,}39 = 15{,}39$$

При этом точное значение функции в этой точке $z(2{,}01;\ 1{,}02) = 15{,}392404$, то есть реальное приращение функции $\Delta z = 0{,}392404$.

Абсолютная погрешность: $\Delta z - dz = 0{,}002404$.

Относительная погрешность: $\delta = \dfrac{0{,}002404}{0{,}392404} \approx 0{,}006$, меньше чем 1%.

Дифференцирование сложных функций.

Пусть $z = f(x, y)$, и x и y – функции переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Найдем производную z'_t, если существуют производные z'_x, z'_y, а также x'_t и y'_t.

Дадим t приращение Δt. Тогда у функций $x(t)$ и $y(t)$ приращения Δx и Δy соответственно. А у функции $z \to \Delta z$.

Согласно формуле полного приращения:

$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon\cdot\rho$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ и $\varepsilon = \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} \to 0$

При $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\cdot\frac{\rho}{\Delta t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho}{\Delta t}$$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ $\quad\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{dy}{dt}$ $\quad\dfrac{\rho}{\Delta t} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \to \pm\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}$ при $\Delta t \to 0$

Если $\Delta t \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а также $\varepsilon \to 0$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to f'_x(x,y)\cdot x'_t + f'_y(x,y)\cdot y'_t$$

Тогда $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Пример. $z=x^y$, $x=arctgt$, $y=\sin t$.

$z'_x=y\cdot x^{y-1}$, $z'_y=x^y\cdot\ln x$, $x'_t=\frac{1}{1+t^2}$, $y'_t=\cos t$.

$$\frac{dz}{dt}=y\cdot x^{y-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}+x^y\cdot\ln x\cdot\cos t=\sin t\cdot arctgt^{\sin t-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}+$$
$$+arctgt^{\sin t}\cdot\ln(arctgt)\cdot\cos t=arctgt^{\sin t}\left(\frac{\sin t}{1+t^2}+\cos t\cdot\ln(arctgt)\right)$$

Рассмотрим более сложный случай.

Пусть $z=f(x,y)$, $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$. Найдем частные производные z'_u и z'_v при условии что существуют все производные z'_x, z'_y, x'_v, x'_u, y'_v, y'_u.

Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}$, для этого закрепляем v (считаем его *const*). Тогда функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ есть функции только от одной переменной u, тогда все сводится к предыдущему случаю и $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$. Рассуждая аналогично получим $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

Пример. 1. Найти частные производные функции $z=\sin(uv)$, где $u=2x+3y$, $v=xy$.

Найдем $\frac{\partial z}{\partial u}=\cos(uv)\cdot u$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\cos(uv)\cdot v$, $\frac{\partial u}{\partial x}=2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3$, $\frac{\partial v}{\partial x}=y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=x$.

Согласно полученной формуле: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(uv)\cdot u\cdot 2+\cos(uv)\cdot v\cdot y=\cos(uv)(2u+yv)=$$
$$=\cos((2x+3y)xy)\left(2(2x+3y)+xy^2\right)$$

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(uv)\cdot u\cdot y+\cos(uv)\cdot v\cdot x=\cos(uv)(uy+xv)=$$
$$=\cos((2x+3y)xy)\left(y(2x+3y)+x^2y\right)$$

2. Найти частные производные функции $z=\frac{u^2v}{w}$, где $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=y$.

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2uv}{w}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u^2}{w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}=-\frac{u^2v}{w^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, $\frac{\partial w}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}=1$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2uv}{w}\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{w}\cdot 1-\frac{u^2v}{w^2}\cdot 0=\frac{2x^2}{y^3}+\frac{x^2}{y^3}=\frac{3x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2uv}{w}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{w}\cdot 0-\frac{u^2v}{w^2}\cdot 1=\frac{2x^3}{y^4}+\frac{x^3}{y^6}$$

Дифференцирование неявно заданной функции.

Рассмотрим функцию $F(x, y) = C$ (C = $const$). Это уравнение задает неявную функцию $y(x)$. Предположим, мы решили это уравнение и нашли явное выражение $y = y(x)$. Теперь можно рассмотреть функцию $z = F(x, y)$, где $y = y(x)$. То есть это сложная функция, производная для которой $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'_x$. Так как $F(x, y) = C$, то $\frac{dz}{dx}=0$. Отсюда $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'_x=0$ и $y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

Пример. Записать уравнение касательной к кривой $x^5+y^5-2xy^3-17=0$ в точке $M(1, 2)$.

Уравнение касательной к кривой в точке (x_0, y_0): $y-y_0=y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$.

$$F(x, y)=x^5+y^5-2xy^3-17$$

$$F'_x=5x^4-2y^3,\ F'_y=5y^4-6xy^2,\ y'_x=-\frac{5x^4-2y^3}{5x^5-6xy^2}.$$

$$y'_x(1,2)=-\frac{5\cdot 1^4-2\cdot 2^3}{5\cdot 1^5-6\cdot 2\cdot 2^2}=\frac{11}{56}$$

Искомое уравнение: $y-2=\frac{11}{56}\cdot(x-1)$

Запишем уравнение касательной к кривой $F(x, y) = C$ в точке (x_0, y_0) в общем виде.

$$y-y_0=y'_x(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$y'_x(x_0)=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$, подставим в уравнение касательной

$y-y_0=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}\cdot(x-x_0)$ после преобразований получим:

$$F'_x(x_0, y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0)=0$$

Рассмотрим более сложный случай. Пусть функция $z = z(x, y)$ неявно определяется из уравнения $F(x, y, z) = C$. Продифференцируем функцию $F(x, y, z)$ по x и по y, соответственно, используя правило дифференцирования сложной функции.

Тогда

$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot z'_x=0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot z'_y=0$. Отсюда получаем

$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$ и $z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$.

Пример: Найти частные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^3+y^3+z^3-xyz=0$

$$F(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-xyz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-yz,\ \frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-xz,\ \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-xy.$$

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz-3x^2}{3z^2-xy},\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz-3y^2}{3z^2-xy}.$$

Частные производные высших порядков.

Рассмотрим функцию $z=8x^3y^2+16xy^2-9x$, можно найти ее частные производные по x и по y.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=24x^2y^2+16y^2-9 \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=16x^3y+32xy.$$

Они также являются функциями от двух переменных x и y, которые в свою очередь можно дифференцировать по этим переменным.

Обозначение: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$,

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$.

Найдем вторые производные для указанной функции:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=48xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=48x^2y+32y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=16x^3+32x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=48x^2y+32y$.

Сравнивая выражения для ***смешанных*** производных видим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Оказывается, смешанные производные не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование. Это верно для производных любого порядка. Так, например, $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^5 z}{\partial x^3\partial y^2}$.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=96xy,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y\partial x}=96y,\ \frac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y\partial x\partial y}=96.$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 48y^2,\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 96y,\ \frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2} = 96.$$

Производная функции по направлению.

Пусть $u = f(x, y)$ – функция определенная в области D. Рассмотрим точку $M(x, y) \in D$ и некоторое направление $\vec{l}$, определяемое направляющими косинусами $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. (α и β – углы, образованные лучом l с положительными направлениями Ox и Oy.)

Переместимся по направлению луча l в точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Приращение функции: $\Delta u_l = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ - это приращение функции в данном направлении.

$MM' = \Delta l$, $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$.

Определение. Под производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции в данном направлении l понимается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения, при условии что последнее стремиться к нулю.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u_l}{\Delta l}$$

Таким образом $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ есть производные функции u в направлениях Ox и Oy.

Смысл производной по направлению: $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изменения функции в направлении l.

Выведем формулу дифференцирования.

Представим полное приращение функции в виде:

$$\Delta u_l = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$ где $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

$$\Delta u_l = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \alpha\Delta l \cos\alpha + \beta\Delta l \cos\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\Delta l + (\alpha\cos\alpha + \beta\cos\beta)\Delta l$$

$$\frac{\Delta u_l}{\Delta l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right) + (\alpha\cos\alpha + \beta\cos\beta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta u_l}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$$

Если функция $u = f(x, y, z)$ и в пространстве задано направление l ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) то производная по этому направлению вычисляется аналогично:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Пример: Найти производную функции $u = x^2 + 2xy - y^2$ в точке M(1, 2) в направлении вектора $\vec{a} = (4,3)$

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{5}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x+2y=6 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2x-2y=-2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta = 6\cdot\frac{4}{5}-2\cdot\frac{3}{5}=3{,}6$$

Скалярное и векторное поле. Градиент.

Определение 1. Говорят, что в данной области *D* определено скалярное поле, если каждой точке $M \in D$ ставится в соответствие некоторое скалярное число (скаляр) $u = f(M)$.

Так как каждому положению точки *M* отвечает численное значение величины *u*, то это просто числовая функция точки. Если для положения точки *M* в пространстве ввести декартову систему координат, то получим $u = f(x, y, z)$ (или $u = f(x, y)$) то есть функцию трех или двух переменных.

Пример: Распределение температуры в неравномерно нагретом теле, распределение плотностей, концентраций вещества.

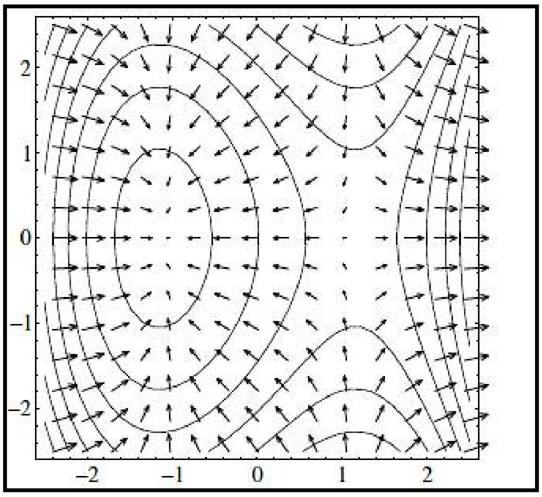
Можно сказать, что понятия скалярного поля есть физическая трактовка функции нескольких переменных.

Определение 2. Говорят, что в данной области *D* определено векторное поле, если каждой точке $M \in D$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{u} = \overrightarrow{f(M)}$, или перейдя к координатам $u_x = F_x(M)$, $u_y = F_y(M)$, $u_z = F_z(M)$.

Пример векторного поля: распределение скоростей в потоке газа или жидкости, распределение сил в деформированном теле.

Определение 3. Пусть $u = f(x, y)$ – плоское скалярное поле, тогда вектор $\overrightarrow{grad\,u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$ или $\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j}$ называется ***градиентом поля***.

Аналогично для пространственного поля $u = f(x, y, z)$: $\overrightarrow{grad\,u} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.



То есть скалярное поле порождает векторное поле – поле градиентов.

Примеры. 1. $u = x^3 - 4x - y^2$, $\overrightarrow{grad\,u} = \{3x^2 - 4; -2y\}$.

В точке с координатами (0, 0) вектор $\overrightarrow{grad\,u} = \{-4; 0\}$.

2. Найти градиент поля $u = \frac{x}{y} + z^2$ в точке *M*(2, 1, 0).

$\overrightarrow{grad\,u} = \left\{\frac{1}{y}; -\frac{x}{y^2}; 2z\right\}$. В точке *M*: $\left.\overrightarrow{grad\,u}\right|_M = \{1; -2; 0\}$.

Связь градиента и производной по направлению функции.

Теорема. Пусть дано скалярное поле $u = f(x, y, z)$ и в этом скалярном поле определено поле градиентов $\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}$.

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ по направлению некоторого вектора $\bar{l}$ равняется проекции вектора $\overrightarrow{grad u}$ на вектор $\bar{l}$.

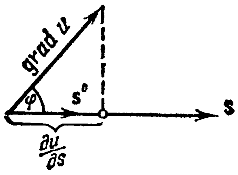
Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\bar{l}_0$, соответствующий вектору $\bar{l}$:

$\vec{l}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{\mathbf{i}} + \cos\beta \cdot \vec{\mathbf{j}} + \cos\gamma \cdot \vec{\mathbf{k}}$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{grad u}$ и $\bar{l}_0$:

$$\left(\overrightarrow{grad u}, \vec{l}_0\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть производная от функции *u* по направлению вектора $\bar{l}$, то есть: $\left(\overrightarrow{grad u}, \vec{l}_0\right) = \dfrac{\partial u}{\partial l}$.



Обозначим угол между $\overrightarrow{grad u}$ и $\bar{l}_0$ как φ. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\overrightarrow{grad u}, \vec{l}_0\right) = \left|\overrightarrow{grad u}\right| \cdot \left|\vec{l}_0\right| \cdot \cos\varphi = \left|\overrightarrow{grad u}\right| \cdot \cos\varphi = пр_{\bar{l}_0}\overrightarrow{grad u}$$

Из доказанной теоремы следует что производная по направлению достигает наибольшего значения если cosφ = 1, то есть если φ = 0.

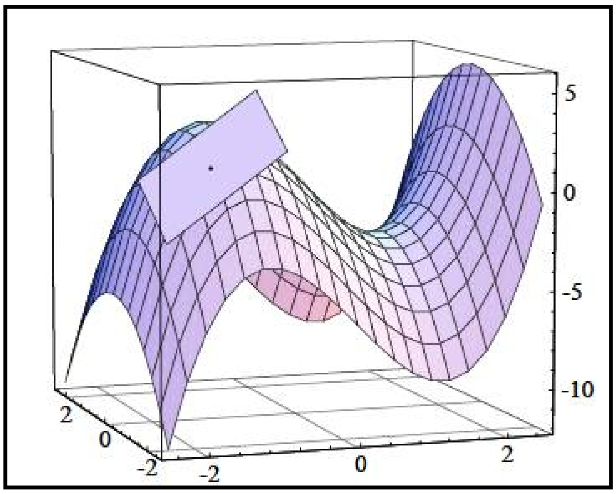
Установим некоторые свойства градиента. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{l}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, то есть *градиент функции указывает направление наибыстрейшего изменения функции.*

В этом состоит *физический смысл градиента.*

Уравнение касательной плоскости и нормали.

Определение. ***Касательной плоскостью*** к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным в этой точке на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.



Теорема. (Без доказательства). Во всякой точке, где $\left.\overrightarrow{grad u}\right|_M \neq 0$ градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку в сторону возрастания поля.

На рисунке изображена функция $u = x^3 - 4x - y^2$ и рядом поле градиентов рядом с линиями уровня, что иллюстрирует данную теорему.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$

Из приведенной теоремы следует, что $\left.\overrightarrow{grad u}\right|_{M_0}$ перпендикулярен касательной к любой дифференцируемой кривой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и лежащей на поверхности уровня. Эти касательные образуют касательную плоскость к поверхности уровня и следовательно в качестве вектора нормали к касательной плоскости можно взять вектор $\overrightarrow{grad\,u}\Big|_{M_0}$.

В точке M_0 вектор градиента имеет координаты: $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}; \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}; \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \right\}$ следовательно для поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости можно записать:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

Для уравнения нормали к поверхности вектор градиента будет уже направляющим вектором, поэтому данное уравнение:

$$\frac{(x - x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M_0}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M_0}} = \frac{(z - z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{M_0}}$$

Если поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$, можно его переписать как $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ и тогда вектор нормали (градиента) запишем в виде $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}; \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}; -1 \right\}$, соответственно уравнение касательной плоскости

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot (y - y_0)$$ и нормальной прямой

$$\frac{(x - x_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Пример. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ в точке $M_0(-1, 0, 1)$.

Поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$, поэтому вектор нормали $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0}; \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0}; -1 \right\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 3x + 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = -6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = -1, \quad \vec{N} = \{-6; -1; -1\}$$

$$(z - 1) = -6 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (y - 0)$$

$$6x + y + z + 5 = 0$$

$$\frac{(x + 1)}{-6} = \frac{(y - 0)}{-1} = \frac{(z - 1)}{-1}$$

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$$

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Точка (x_0, y_0) называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$ если существует такая ε – окрестность точки (x_0, y_0), что для каждой точки (x, y) отличной от (x_0, y_0), из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек (x, y) отличных от (x_0, y_0), из ε – окрестность точки (x_0, y_0) выполняется неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) функции называется ***максимумом (минимумом)*** функции. Максимум и минимум функции – ***экстремум функции***.

Теорема (Необходимое условие экстремума). Если в точке M(x_0, y_0) дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0)=0$, $f'_y(x_0, y_0)=0$.

Определение. Точка в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, то есть $f'_x=0$, $f'_y=0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***. В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0, y_0) значения $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$. Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$. Тогда:

1. Если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум. Максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$.
2. Если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.
3. В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке (x_0, y_0) может быть или может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примеры: 1. Найти экстремумы функции $z=x^3+y^3-9xy$.

$z'_x=3x^2-9y$, $z'_y=3y^2-9x$.

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases}3x^2-9y=0\\ 3y^2-9x=0\end{cases},\ \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases},\ \begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}.$$

Проведем исследование стационарных точек.

$z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=-9$, $z''_{yy}=6y$.

В точке (0, 0): $A = 0$, $B = -9$, $C = 0$, $\Delta = -81 < 0$. То есть в точке нет экстремума.

В точке (3, 3): $A = 18$, $B = -9$, $C = 18$, $\Delta = 324 - 81 = 243 > 0$. То есть в точке экстремум. Так как $A > 0$, то в точке минимум.

2. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-4x-y^2$.

$z'_x=3x^2-4$, $z'_y=-2y$.

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases}3x^2-4=0\\-2y=0\end{cases},\ \begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\y=0\end{cases},\ \begin{cases}x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\y=0\end{cases}.$$

Проведем исследование стационарных точек.

$z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=-2$.

В точке $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},0\right)$: $A=\dfrac{12}{\sqrt{3}}$, $B=0$, $C=-2$, $\Delta<0$. То есть в точке нет экстремума.

В точке $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},0\right)$: $A=-\dfrac{12}{\sqrt{3}}$, $B=0$, $C=-2$, $\Delta>0$. То есть в точке экстремум. Так как $A<0$, то в точке максимум.

3. Исследовать на экстремум функцию $z=x^4+y^4$.

$z'_x=4x^3$, $z'_y=4y^3$.

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases}4x^3=0\\4y^3=0\end{cases},\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}.$$

Проведем исследование стационарной точки.

$z''_{xx}=12x^2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=12y^2$.

В стационарной точке: $A=0$, $B=0$, $C=0$, $\Delta=0$. Нельзя ничего сказать про экстремум в этой точке, необходимы дополнительные исследования.

Нахождение максимального и минимального значения функции в замкнутой области.

Рассмотрим множество G точек плоскости (или пространства). Точка M называется ***внутренней*** точкой множества G, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью. Точка N называется ***граничной*** для множества G если в любой ее полной окрестности имеются точки, как принадлежащие G так и не принадлежащие G.

Совокупность всех граничных точек множества G называется ее границей Γ.

Определение 1. Множество G будем называть областью, если все его точки внутренние. Множество G вместе со своей границе называется замкнутой областью. ($\overline{G}=G\cup\Gamma$)

Определение 2. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется ***абсолютным экстремумом функции***.

Теорема (Вейерштрасса). Абсолютный экстремум функции в данной области достигается либо в стационарной точке, принадлежащей этой области, либо в граничной точке области.

Примеры: 1. Найти наибольшее значение функции $z=1-x+x^2+2y$ в области G, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

$z'_x=-1+2x$, $z'_y=2$

Стационарных точек нет так как $z'_y=2\neq 0$.

Исследуем функцию на границах области.

a.) $x=0$ $z=1+2y$ $0\le y\le 1$ Стационарных точек нет.

$z(0)=1$, $z(1)=3$.

b.) $y=0$ $z=1-x+x^2$ $0\le x\le 1$ $z'=-1+2x$ Стационарная точка $x=1/2$

$z(0)=1$, $z(1)=1$, $z(1/2)=3/4$.

c.) $x+y=1$ $z=3-3x+x^2$ $0\le x\le 1$ $z'=-3+2x$

Стационарная точка $x = 3/2 \notin [0,1]$.

Сравниваем все полученные значения функции z и получаем, что максимальное значение в точке (0,1), $z_{max} = 3$.

2. Найти наибольшее значение функции $z = xy$ в треугольной области G с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$.

$z'_x = y$, $z'_y = x$

Стационарная точка $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Исследуем на границах области: OA: $x = 0$, $z = 0$.

OB: $y = 0$, $z = 0$.

AB: $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} = 1$ $y = 2 - 2x$ $0 \le x \le 1$

$z = 2x - 2x^2$ $z' = 2 - 4x$ $x = ½$, $y = 1$, $M(1/2,1)$.

$z(M) = 1$, $z(A) = 0$, $z(B) = 0$.

$$z_{max}\left(\frac{1}{2},1\right) = 1$$

3. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих заданную полную поверхность S найти параллелепипед с максимальным объемом V.

Решение: Пусть x, y, z – измерения параллелепипеда. $V = xyz$.

Полная поверхность $S = 2(xy + yz + xz) \Rightarrow z = \dfrac{\frac{S}{2} - xy}{x + y}$ $V = \dfrac{Sxy - 2x^2y^2}{2(x+y)}$

Область ограничена: $x > 0$, $y > 0$, $2xy < S$ (т.к. $V > 0$).

$$V'_x = \frac{y^2}{2(x+y)^2}\left(S - 2x^2 - 4xy\right)$$

$$V'_y = \frac{x^2}{2(x+y)^2}\left(S - 2y^2 - 4xy\right)$$

Найдем стационарную точку.

$$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{2(x+y)^2}\left(S - 2x^2 - 4xy\right) = 0 \\ \dfrac{x^2}{2(x+y)^2}\left(S - 2y^2 - 4xy\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 4xy = S \\ 2y^2 + 4xy = S \end{cases} \quad x = y = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Получаем третье измерение $z = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Искомый параллелепипед – куб со стороной $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Условный экстремум.

Пусть в задаче на нахождение минимума или максимума функции переменные связаны некоторыми условиями.

Задача: Дана функция $z = f(x, y)$ (1). Найти максимум если $F(x, y) = C$ (2) (Линия L).

Геометрически это означает, что мы сравниваем значения функции z не во всех точках, а только лежащих на линии (уровня) L.

Решение: Уравнение (2) определяет функцию $y = y(x)$, заданную неявно.

Так как $z = f(x, y(x))$, то $\dfrac{dz}{dx} = f'_x + f'_y \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Необходимое условие экстремума: $\frac{dz}{dx} = 0$, т. е. $f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ (3).

Продифференцируем уравнение связи (2) по x:

$F'_x + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, если $F'_y \neq 0$ то $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Подставляем в (3) и получаем условие: $\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y}$.

Обозначим величину последнего отношения –λ. (знак «–» для удобства).

$$\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y} = -\lambda$$

Получаем, что в точке экстремума должны выполняться условия:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \end{cases}$$

Величина λ – множитель Лагранжа.

Введем функцию Лагранжа, определяемую как:

$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$.

Тогда исходная задача меняется на задачу нахождения безусловного экстремума функции Лагранжа.

Аналогичные рассуждения можно провести для функции большего числа переменных.

Пример: Найти экстремум функции $u(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x$ при условии $x + 2y - z = 3$.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x + \lambda(3 - x - 2y + z)$$

Экстремум будет в точке:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x - 2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2y - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 3 - x - 2y + z = 0$$

Из первых 3-х уравнений исключим λ: $2x - 2 = -y$, $y = 2z$. Из последнего уравнения исключаем x и y: $3 - 1 + z - 4z + z = 0$.

Таким образом: $z = 1$, $y = 2$, $x = 0$.

При данных условиях $u(x, y, z) = -3$.