Методические указания к выполнению контрольной работы № 1
«Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ»

Глава 1. Элементы линейной алгебры

§1. Определители

Определителем (детерминантом) второго порядка называется число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, определяемое равенством $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Числа a_{ij} $(i, j = 1,2)$ называются *элементами* определителя. Первый индекс i указывает номер строки, второй j – номер столбца. Строки и столбцы называют рядами определителя.

Определителем (детерминантом) третьего порядка называется число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, определяемое равенством $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} +$
$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – побочную диагональ определителя.

Порядок определителя равен количеству его строк или столбцов.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания строки и столбца, содержащих этот элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется выражение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

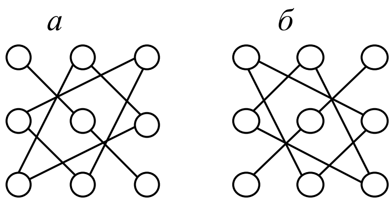

Рис. 1

Один из распространенных способов вычисления определителя третьего порядка – по правилу **«треугольников»**. При вычислении определителя со знаком «+» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1*а*); со знаком «–» берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1*б*).

Другой способ вычисления определителя третьего порядка – по правилу **Саррюса**. Для этого к определителю третьего порядка приписываются справа два первых столбца. Складывают произведения элементов со знаком «+» на диагоналях, параллельных главной, и со знаком «–» на диагоналях, параллельных побочной, т.е. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Основные свойства определителя:

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.
2. Величина определителя меняет знак на обратный при перестановке двух параллельных рядов.
3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя.
4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.
5. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответственно элементы другого параллельного ряда, умноженные на произвольное число.
6. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на их алгебраические дополнения равна величине определителя, т.е. для определителя третьего порядка $\Delta = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ (разложение определителя по i-й строке), или $\Delta = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + \; + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$ (разложение определителя по j-му столбцу).

Пример. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) Вычислим определитель тремя способами:

1) По правилу «*треугольников*» $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 8 + 1 - 6 - 6 - 6 = 18$.

2) По правилу *Саррюса* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 27 + 8 + 1 - 6 - 6 - 6 = 18$.

3) Раскладывая определитель по элементам первой строки,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (9-2) - 2 \cdot (3-4) + (1-6) = 18.$$

б) Определитель четвертого порядка вычисляется разложением по элементам какого-либо ряда. Обычно выбирают ряд, у которого часть элементов равна нулю. Если нулевых элементов нет, то, используя 5-е свойство определителя, зануляют часть элементов ряда.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 + 8 + 12 = -4 .$$

Из второй строки вычли первую, предварительно умноженную на два; из четвертой строки вычли первую; разложили определитель по элементам первого столбца.

§2. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера *m*×*n* называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$)

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}] = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Элементы a_{ij} называются элементами матрицы; элемент a_{ij} расположен в i-й строке и в j-м столбце данной матрицы; m – число строк, n – число столбцов.

Матрица размера $m\times1$ называется столбцом, матрица размера $1\times n$ – строкой.

Матрица размера $n\times n$ называется **квадратной матрицей** порядка n.

Квадратная матрица называется:

а) **треугольной**, если все элементы по одну сторону от главной или побочной диагоналей равны нулю, например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;

б) **диагональной**, если для $i \neq j$ все $a_{ij} = 0$, т.е. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами:

1. Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m\times n$ *равны* тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

2. Суммой $A + B$ двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m\times n$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A и B:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] = C.$$

3. Произведением αA матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m\times n$ на число α называется матрица $B = [b_{ij}]$ того же размера, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на число α:

$$\alpha A = \alpha\,[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] = [b_{ij}] = B.$$

4. Произведением AB матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m\times n$ на матрицу $B = [b_{ij}]$ размера $n\times k$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ размера $m\times k$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$AB = [a_{ij}b_{ij}] = [c_{ij}] = C,$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

В каждом произведении матриц AB число n столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Единичной матрицей E порядка n называется квадратная матрица размера $n\times n$, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Приведем пример единичной матрицы 3-го порядка:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы A порядка n

$$AE = EA = A.$$

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$).

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю ($\det A = 0$).

Матрица A^{-1} называется **обратной** к невырожденной матрице A, если

$$A^{-1}A = A^{-1}A = E.$$

Если в матрице A заменить строки соответствующими столбцами, то получится **транспонированная** матрица A^T.

Квадратная матрица A называется **симметрической**, если $A^T = A$.

Матрица A^V, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, называется **присоединенной** к матрице A.

Обратную матрицу можно найти с помощью присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = (A^V)^T/\det A.$$

Максимальный порядок r отличного от нуля миноров матрицы A называется ее **рангом** (*rang A*).

Элементарные операции над строками (столбцами) матрицы не меняют ее ранга:

1. Перестановка столбцов (строк) местами.
2. Умножение любого столбца (строки) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному столбцу (строке) другого, умноженного на число.
4. Вычеркивание нулевого столбца (строки).

Приведем два способа вычисления ранга матрицы.

1. Используется для матрицы малых размеров. Выбирается произвольно какой-либо минор второго порядка матрицы. Если он отличен от нуля, то выбирается минор третьего порядка, в который входит выбранный ранее минор второго порядка и т. д. Этот метод называется методом окаймляющих миноров.

2. С помощью элементарных преобразований приводят матрицу к треугольному виду.

§3. Системы линейных уравнений

3.1. Определение

Систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

называют системой m линейных уравнений с n неизвестными. a_{ij} называют коэффициентами этих уравнений, которые записываются в виде матрицы (матрица системы):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, стоящие в правых частях уравнений, обозначают столбцом b, называемым столбцом свободных членов.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется расширенной матрицей системы:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Нашу систему уравнений можно записать в матричной форме $Ax=b$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если все свободные члены равны нулю, то систему называют однородной.

Совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется **решением системы** (1), если каждое ее уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел α_i вместо соответствующих неизвестных x_i для всех $i = 1, \ldots, n$.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а не имеющая – несовместной.

Решение называется тривиальным, если нулевой вектор $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ является решением системы.

3.2. Правило Крамера. Теорема Кронекера – Капелли

Теорема Крамера. Система из n уравнений с n неизвестными в случае, когда детерминант матрицы системы отличен от нуля, имеет единственное решение.

Это решение находится по формулам $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – обозначен детерминант матрицы системы; Δ_i – детерминант матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Например,

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем величину определителя матрицы A по правилу «треугольников»:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 10 - (-1 + 15 + 0) = -2 \neq 0 .$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля. Следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение. Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 30 - (3 + 25 + 0) = 24 - 28 = -4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 - 6 - (6 - 9 + 0) = -1 + 3 = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 12 + 50 - (-5 + 90 - 12) = 71 - 73 = -2;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $x = (2;\ -1;\ 1)^T$.

Если определитель Δ однородной системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то эта система имеет только тривиальное решение.

Если однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, то ее определитель Δ равен нулю.

Решение двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

когда хотя бы один из миноров 2-го порядка отличен от нуля удобно искать по формулам:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} k, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} k, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} k,$$

где k – произвольное число.

Теорема Кронекера – Капелли. Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда, и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы B.

Следствие. Если ранг матрицы B больше ранга матрицы A, то система не имеет решений. Она противоречива.

Пример. Определить совместны ли системы:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Решение.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ система совместна, т.к. $rang\ A = rang\ B$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Найдем ранг матрицы. Вычитаем из второй строки первую, а потом вычеркиваем нулевую строку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow rang\ A = 1.$$

Найдем ранг расширенной матрицы. Вычитаем из второй строки первую, а потом переставляем 2-й и 3-й столбцы местами:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ rang\ B = 2.$$

Так как $rang\ A < rang\ B$, то система несовместна.

Ответ: а) система совместна, б) система несовместна.

3.3. Метод последовательных исключений Жордана – Гаусса

С помощью элементарных преобразований строк расширенная матрица системы приводится к треугольному виду. Обычно нули получают ниже главной диагонали.

При решении методом Жордана – Гаусса системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными после приведения расширенной матрицы системы к треугольному виду получится:

а) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, где $a_{33} \neq 0$ (система будет иметь единственное решение);

б) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, где $b_3 \neq 0$ (система будет несовместной);

в) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (система будет иметь множество решений).

Пример решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Жордана – Гаусса смотри ниже в разделе: «Решение типовых задач контрольной работы №1». Этот метод позволяет решать систему линейных уравнений с различным количеством уравнений и неизвестных.

Глава 2. Векторная алгебра

§1. Векторы. Основные понятия

Направленный отрезок (или упорядоченную пару точек) называют **вектором**.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (или модулем, или абсолютной величиной).

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Не различая равные векторы, приходим к понятию свободного вектора. Свободный вектор допускает перенос его в любую точку пространства при условии сохранения длины и направления.

§2. Линейные операции над векторами

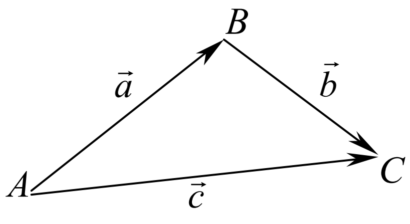

Рис. 2

Пусть даны два вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, тогда вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ или $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (рис. 2).

Для трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ их суммой $\vec{d}$ является диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Произведением вектора $\vec{a}$ **на вещественное число** α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$,

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,

3) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Основные свойства линейных операций:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,	5) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,	6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,	7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$,	8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

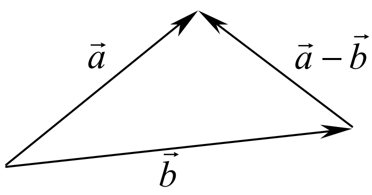

Рис. 3

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис. 3).

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор этой прямой. Базисом на плоскости – два неколлинеарных вектора на этой плоскости. Базисом в пространстве – три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Если векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ образуют базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{p}$, то числа α, β, γ называют компонентами (или координатами) вектора $\vec{a}$ в данном базисе, т.е. $\vec{a}\{\alpha;\beta;\gamma\}$.

Теорема

1) Каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости, может быть разложен по базису на этой плоскости.

2) Каждый вектор может быть разложен по базису в пространстве.

3) Компоненты вектора в каждом случае определяются однозначно.

Следствие 1. Равные векторы имеют одинаковые компоненты.

Следствие 2. При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число. Если $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{p}$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha)\vec{m} + (\lambda\beta)\vec{n} + (\lambda\gamma)\vec{p}$.

Следствие 3. При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты. Если $\vec{a} = \alpha_1\vec{m} + \beta_1\vec{n} + \gamma_1\vec{p}$, $\vec{b} = \alpha_2\vec{m} + \beta_2\vec{n} + \gamma_2\vec{p}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{m} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{n} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{p}.$$

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_k$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0$. В противном случае эти векторы называются **линейно независимыми**.

Свойства линейной зависимости векторов:

1) Если среди векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_k$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2) Если к линейно зависимой системе векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система также будет линейно зависимой.

Следствие 1. Три компланарных вектора линейно зависимы.

Следствие 2. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них раскладывается в линейную комбинацию остальных.

§3. Проекция вектора

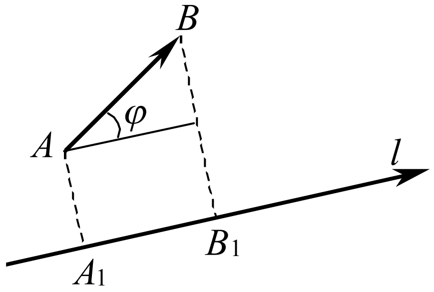

Рис. 4

Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l называется величина A_1B_1 направленного отрезка оси l и обозначается $\text{Пр}_l\vec{a}$.

Теорема. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна длине вектора $\vec{a}$, умноженной на косинус φ угла наклона вектора $\vec{a}$ к оси l, т.е. $Пр_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ (рис. 4).

§4. Системы координат

4.1. Декартова система координат

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка называется началом координат или полюсом. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, – осями координат. Первая прямая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Чтобы найти компоненты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Вектором $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M, называется **радиус-вектором** точки M.

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны единице.

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Каждый вектор $\vec{a}$ может быть, и притом единственным способом, разложен по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \{x; y; z\}$,

где x, y, z – декартовы прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$.

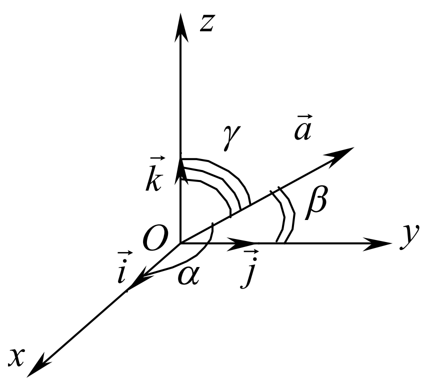

Рис. 5

Теорема. Декартовы прямоугольные координаты x, y и z вектора $\vec{a}$ равны проекциям этого вектора на оси OX, OY и OZ соответственно.

На рис. 5 α, β, γ – углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям Ox, Oy и Oz соответственно.

Из теоремы следует: $x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, $z = |\vec{a}|\cos\gamma$. Длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Выражая направляющие косинусы, получим:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Возведем в квадрат три равенства и, складывая их, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

Итак, произвольный вектор $\vec{a}$ однозначно определяется заданием трех его координат или заданием длины и трех направляющих косинусов.

4.2. Полярная система координат

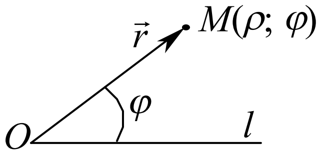

Рис. 6

Полярная система координат определена, если задана точка O, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч l, который называют полярной осью.

Положение точки M фиксируется двумя числами: радиус-вектором $\vec{r} = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 6). Угол φ называют полярным углом. Он измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Пара чисел $(\rho;\ \varphi)$ и $(\rho;\ \varphi + 2\pi)$ представляет собой полярные координаты одной и той же точки.

Переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

В пространстве обобщением полярных координат являются цилиндрические и сферические системы координат.

4.3. Цилиндрическая система координат

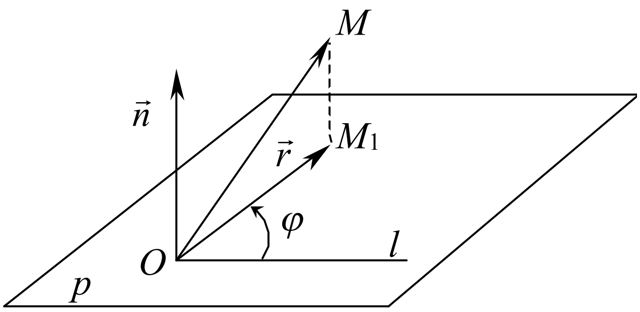

Рис. 7

Цилиндрические координаты точки M – это три числа $(\rho;\ \varphi;\ z)$, где ρ и φ – полярные координаты точки M_1, а z – компоненты вектора $\overrightarrow{M_1M}$ по вектору $\vec{n}$; p – плоскость, в которой расположена полярная система координат (рис. 7).

Переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

4.4. Сферическая система координат

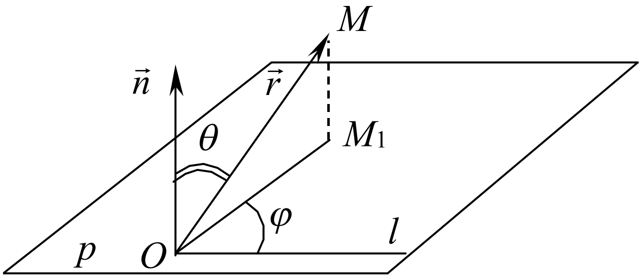

Рис. 8

Сферические координаты точки M – это три числа (ρ; φ; θ), где ρ – радиус-вектор точки M, φ так же, как и для цилиндрической системы координат, θ - угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и нормалью $\vec{n}$ плоскости p (рис. 8).

Переход от декартовых координат к сферическим осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$

§5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi .$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b} .$$

Теорема 2. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют острый угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно.

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
2) $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = a^2 > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Физический смысл скалярного произведения

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению силы на вектор перемещения $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

Теорема 3. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то их скалярное произведение равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ является равенство $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Следствие 2. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

§6. Векторное произведение векторов

Три вектора называются **упорядоченной тройкой** (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым и какой – третьим.

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой (левой), если выполнено условие: находясь внутри телесного угла, образованного приведением к общему началу векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$, совершающийся против часовой стрелки (по часовой стрелки).

Декартова система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правые системы координат.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$ или $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и отвечающий следующими требованиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, причем $0\le\varphi\le\pi$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2. Длина (модуль) векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$ равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$,

2) $[(\alpha\vec{a})\vec{b}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]$,

3) $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]$,

4) $[\vec{a}\vec{a}]=0$.

§7. Смешанное произведение трех векторов

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а затем получившийся при этом вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}$, называемое **смешанным произведением векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Геометрическое свойство смешанного произведения

Смешанное произведение $[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ левая.

Свойства смешанного произведения:

1) знаки операций «крест» и «точка» можно менять местами:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c};$$

2) необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения;

3) смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно нулю;

4) от перестановки двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}\,.$$

§8. Векторное и смешанное произведения в декартовых координатах

Теорема 1. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Если два вектора $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е. $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Иногда в знаменателях могут стоять нули. Чтобы избежать этого, мы будем понимать пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ в смысле $ad = cb$.

Теорема 2. Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$ является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Если вектор $\vec{b}$ векторно умножается на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ также векторно умножается на векторное произведение $[\vec{b}\vec{c}]$, то получившийся при этом вектор $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ называется **двойным векторным произведением**.

Теорема 3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедлива формула

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \text{ или } [[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c})\,.$$

Для запоминания этой формулы удобно правило: двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

Глава 3. Уравнение линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве

§1. Общее понятие об уравнениях

Алгебраической поверхностью (**линией**) называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнениями поверхности (1) и линии (2):

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}z^{m_2}+\ldots+A_nx^{k_n}y^{l_n}z^{m_n}=0; \qquad (1)$$

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}+\ldots+A_nx^{k_n}y^{l_n}=0, \qquad (2)$$

где все показатели степени – целые неотрицательные числа, а наибольшая из сумм $k_1 + l_1 + m_1$, $k_2 + l_2 + m_2$, …, $k_n + l_n + m_n$ для поверхности и $k_1 + l_1$, $k_2 + l_2$, …, $k_n + l_n$ для линии называется степенью уравнения, или порядком поверхности (линии).

Всякая неалгебраическая линия (поверхность) называется трансцендентной.

Теорема. Если поверхность (линия) в некоторой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (1) или (2), то и в любой другой декартовой системе координат она может быть задана уравнением того же вида, имеющим ту же степень. То есть порядок алгебраической линии (поверхности) является инвариантным.

Инвариантом называется всякая величина, не меняющаяся при изменении системы координат.

Представим себе, что линия - это траектория движущейся точки. В каждый момент времени t нам известно положение точки, т.е. ее координаты относительно выбранной заранее системы координат. Тогда мы приходим к **параметрическим уравнениям линии**

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t); \\ z=\chi(t), \end{cases}$$

где t - параметр.

По аналогии **параметрические уравнения поверхности** имеют вид

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v); \\ y=\psi(u,v); \\ z=\chi(u,v). \end{cases}$$

§2. Различные виды уравнения прямой на плоскости

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ с произвольными коэффициентами A, B и C, такими, что A и B не равны одновременно нулю, называется **общим уравнением прямой**.

Общее уравнение прямой называется полным, если все его коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

1. Если $C = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

2. Если $B = 0$, то уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси OY.

3. Если $A = 0$, то уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси OX.

Полное уравнение прямой может быть приведено к **уравнению прямой «в отрезках» на осях**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b - это отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{n}\{A; B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Каноническим уравнением прямой называют уравнение вида

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой; $\vec{q}\{l; m\}$ – координаты направляющего (параллельного прямой) вектора.

Из канонического уравнения прямой можно элементарно получить параметрические уравнения прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и в правой частях канонического уравнения прямой, тогда:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$ - **параметрические уравнения прямой**.

Параметрические уравнения прямой имеют наглядную физическую интерпретацию. Если считать, что параметр t - это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью $v = \sqrt{l^2 + m^2}$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ **и имеющей угловой коэффициент** $\boldsymbol{k}$, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловым коэффициентом называют тангенс угла наклона прямой к оси OX.

Уравнение вида $y = kx + b$ называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

Уравнение вида $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ называют **нормированным уравнением прямой**, где θ - угол между нормальным вектором прямой и осью OX; p – расстояние от начала координат до прямой.

Отклонение δ произвольной точки $M_0(x_0;\, y_0)$ от прямой определяется:

$$\delta = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p.$$

Чтобы вычислить расстояние d от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой, достаточно вычислить отклонение $d = |\delta|$.

Расстояние от точи $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Чтобы привести общее уравнение прямой к нормированному виду, нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена общего уравнения прямой.

Уравнение вида $\rho = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \theta)}$ называется **полярным уравнением прямой**, где ρ - расстояние от полюса до прямой; θ - угол между нормалью прямой и полярной осью.

Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку M, называют пучком прямых с центром в точке M.

Уравнение пучка прямых имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α, β - любые числа, не равные одновременно нулю.

Векторное уравнение прямой имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0,$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор прямой; $\vec{r}_0$ - радиус вектор точки $M_0(x_0;\, y_0)$, принадлежащей прямой; $\vec{r}$ - радиус вектор произвольной точки M, принадлежащей прямой.

Определение угла между прямыми

Угол φ, отсчитанный против хода часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$ определяется формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Для прямых, заданных в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, угол определяется формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$.

Условие параллельности двух прямых $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$, условие перпендикулярности $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Всего приведено 12 различных видов уравнений прямой на плоскости.

§3. Различные виды уравнения плоскости

Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{n}\{A; B; C\}$, называют уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение называют полным, если все его коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

1. Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.
2. Если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OX.
3. Если $B = 0$, то уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OY.
4. Если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OZ.
5. Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OXY.
6. Если $A = 0$ и $C = 0$, то уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OXZ.
7. Если $B = 0$ и $C = 0$, то уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OYZ.

Полное уравнение плоскости может быть приведено к **уравнению плоскости «в отрезках» на осях**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях OX, OY, OZ соответственно.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение представляет собой условие компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, где точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка на искомой плоскости.

Нормированное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\vec{n}\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ – единичный нормальный вектор искомой плоскости; p – расстояние от плоскости до начала координат.

Подставив координаты произвольной точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ в нормированное уравнение, найдем отклонение δ точки от плоскости:

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Тогда расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости равно $d = |\delta|$.

Если плоскость задана в общем виде, то расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Векторное уравнение плоскости определяется скалярным произведением:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0,$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор; $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, принадлежащей плоскости; $\vec{r}$ - радиус-вектор любой точки плоскости.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую L называется **пучком плоскостей** с центром L.

Уравнение пучка всех плоскостей, проходящих через линию L, имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α, β – любые числа, не равные одновременно нулю.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, называется **связкой плоскостей** с центром в точке $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$.

Уравнение связки плоскостей с центром в точке $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ имеет вид

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0,$$

где α, β, γ – любые числа, не равные одновременно нулю.

Если даны две плоскости, заданные общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то **определение угла между указанными плоскостями** сводится к определению угла φ между их нормальными векторами $\vec{n}_1\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2;B_2;C_2\}$. Из определения скалярного произведения следует

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Тогда **условие параллельности двух плоскостей** эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов этих плоскостей. По определению два вектора коллинеарны, если их компоненты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

т.е. равенство нулю скалярного произведения нормальных векторов.

§4. Прямая линия в пространстве

Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой;
$\vec{q}\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой.

Из канонических уравнений можно легко получить **уравнения прямой в проекциях**

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m};\\[2mm] \dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}.\end{cases}$$

Уравнения прямой, проходящей через различные две точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Параметрические уравнения прямой получаются из канонических, если принять за t каждое из соотношений

$$\begin{cases}x=x_0+lt;\\ y=y_0+mt;\\ z=z_0+nt.\end{cases}$$

Общие уравнения прямой (пересечение двух плоскостей) имеет вид

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

Векторное уравнение прямой имеет вид $[\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{q}]=0$,

где $\vec{q}$ – направляющий вектор прямой; $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, принадлежащей прямой; $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки M, принадлежащей прямой.

Определение угла между прямыми в пространстве сводится к определению угла между направляющими векторами этих прямых. Если $\vec{q}_1\{l_1;m_1;n_1\}$, $\vec{q}_2\{l_2;m_2;n_2\}$ – направляющие векторы, то

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{q}_1\vec{q}_2)}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Тогда **условие параллельности прямых** сводится к условию параллельности направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Определение угла между прямой и плоскостью сводится к определению угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Если $\vec{q}\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n}\{A;B;C\}$ – нормальный вектор плоскости, то

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Глава 4. Кривые второго порядка

§1. Введение

Пусть задана кривая, определяемая неявно уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа; A, B и C одновременно не равны нулю.

Эта кривая называется **кривой второго порядка**.

Уравнение определяет мнимую кривую второго порядка, если оно не имеет точек $(x; y)$ с действительными координатами, удовлетворяющих данному уравнению. Например, $x^2 + y^2 = -1$.

Мнимые кривые в работе не изучаются.

Приведем еще одно определение кривой второго порядка.

Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение их расстояний до заданной точки, называемой фокусом, и до заданной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная, равная ε, является кривой 2–го порядка с эксцентриситетом, равным ε. Если $\varepsilon < 1$, то кривая второго порядка – эллипс; $\varepsilon = 1$ – парабола; $\varepsilon > 1$ – гипербола.

§2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $r_1 + r_2 = const = 2a$.
Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$.

Если $a > b$, то эллипс расположен вдоль оси Ox; если $a < b$, то эллипс расположен вдоль оси Oy (рис. 9*а*, 9*б*).

Если $a < b$, то, сделав замену $x = y'$, $y = x'$; $a = b'$, $b = a'$, перейдем в «штрихованную» систему координат, в которой уравнение будет иметь канонический вид:

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1.$$

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение эллипса имеет канонический вид, называется канонической.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются **вершинами эллипса**. Расстояния от начала координат до вершин a и b называются соответственно **большой и малой полуосями эллипса**.

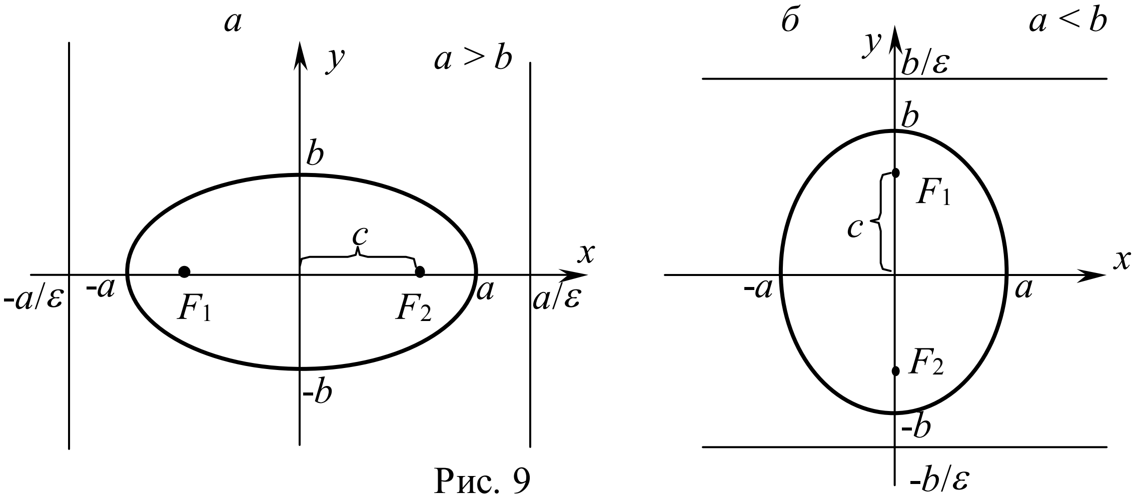

Рис. 9

Центр симметрии эллипса, совпадающий с началом координат, называется **центром эллипса**.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов, то $c^2 = a^2 - b^2$.

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $\varepsilon < 1$ называется **эксцентриситетом эллипса**.

Расстояние от произвольной точки $M(x; y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы, т.е. $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$.

С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его **директрисами**. Их уравнения в канонической системе имеют вид $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

§3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $|r_1 - r_2| = const = 2a$ (рис. 10).

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение гиперболы имеет канонический вид, называется канонической.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ось абсцисс канонической системы пересекает гиперболу в точках, называемых **вершинами гиперболы**. Ось ординат не пересекает гиперболу. a и b называются вещественной и мнимой полуосями гиперболы. Центр симметрии гиперболы, совпадающий с началом координат, называется **центром гиперболы**.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов гиперболы, то $c^2 = a^2 + b^2$.

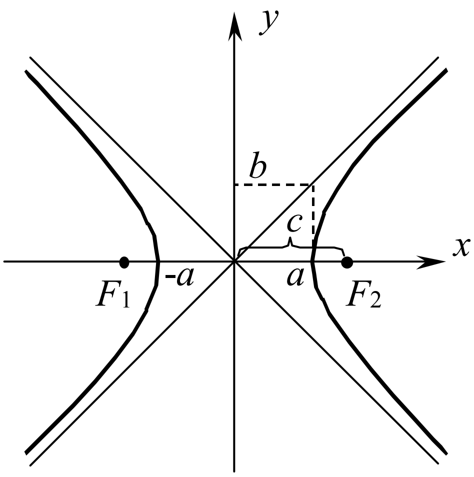

Рис. 10

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ $(\varepsilon > 1)$ называется **эксцентриситетом гиперболы**.

Расстояние от произвольной точки $M(x; y)$, лежащей на гиперболе, до каждого из фокусов равно $r_{1,2} = |a \pm \varepsilon x|$.

Гипербола с равными полуосями $(a = b)$ называется **равносторонней**.

Прямые с уравнениями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ в канонической системе называются **асимптотами** гиперболы.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называют **директрисами** гиперболы в канонической системе координат.

§4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости (рис. 11).

Указанная точка F называется фокусом параболы, а фиксированная прямая – директрисой параболы.

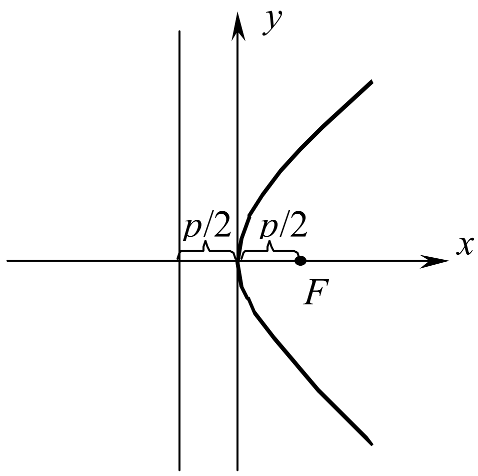

Рис. 11

Система координат, в которой парабола имеет канонический вид, называется **канонической**, а ось Ox – осью параболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется **вершиной параболы**.

Фокус параболы F имеет координаты $(p/2; 0)$.

Директрисой параболы называется прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ в канонической системе координат.

Расстояние от произвольной точки параболы до фокуса F равно $r = x + \dfrac{p}{2}$.

§5. Исследование общего уравнения кривой 2-го порядка

Как уже говорилось раньше, линией второго порядка называется линия, определяемая уравнением 2-й степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Запишем дискриминант уравнения $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ и дискриминант старших членов $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

1) Если $\delta > 0$ и $\Delta \neq 0$, то кривая 2-го порядка – эллипс (действительный или мнимый).

2) Если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$ – точка.

3) Если $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$ – гипербола.

4) Если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$ – пара пересекающихся прямых.

5) Если $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ – парабола.

6) Если $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ – пара параллельных прямых (действительных или мнимых).

Глава 5. Функция. Теория пределов. Непрерывность функции

§1. Функция

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений.

Переменная величина y называется **функцией** (однозначной) от переменной величины x, если каждому значению величины x, из области ее изменения, соответствует единственное вполне определенное значение y или, в символической записи, $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом, y иногда называют зависимой переменной. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Символ f называется характеристикой функции. Вместо буквы f можно употреблять любую другую букву. Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывается так: $f(a)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.

Классификация функции одного аргумента:

1. **Целая рациональная функция или многочлен**

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – постоянные числа, называемые коэффициентами; n – целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена.

2. **Дробная рациональная функция** представляется в виде частного от деления двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

3. **Иррациональная функция** содержит возведение в степень с рациональным нецелым показателем. Например: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3x + \sqrt[4]{x}}$.

Перечисленные три вида алгебраических функций образуют класс явных алгебраических функций. В общем случае **алгебраической функцией** называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ – некоторые многочлены от x.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной**.

Основные элементарные функции имеют области определения:

1) **степенная функция** $y = x^n$ или $y = \sqrt[2n+1]{x^m}$ определена при любых x, $y = \sqrt[2n]{x^m}$ определена в интервале $[0; +\infty)$ (n, m – натуральные числа);

2) **показательная функция** $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена при любых x;

3) **логарифмическая функция** $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена в интервале $(0; +\infty)$;

4) **тригонометрические функции** $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены при любых x, $y = \mathrm{tg}\, x$ определена при $x \neq (2k+1)\pi/2$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ – при $x \neq k\pi$;

5) **обратные тригонометрические функции** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ определены на отрезке $[-1; 1]$; $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ – при любых x.

Способы задания функции: аналитический (с помощью формулы), табличный (с помощью таблицы) и графический (с помощью графика).

§2. Вычисление пределов

Предел элементарной функции $f(x)$ при x, стремящемся к значению a ($x \to a$), которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Рассмотрим основные свойства пределов:

1) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim_{x\to a}f(x).$$

4) Если существует предел функции $f(x)$ при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n,$$ где n – натуральное число.

5) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, причем предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

При вычислении пределов часто используют **два замечательных предела:**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

и их следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a. \qquad (3)$$

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенностей вида (1^∞), а остальные – для неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Вычисление пределов значительно упрощается при использовании эквивалентности бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших:

1) Если $f(x)\neq 0$ и $f(x)\to 0$ при $x\to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}\to\infty$ при $x\to a$.

2) Если $f(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$ при $x\to a$.

3) Если $f(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$, а $g(x)$ – ограниченная в некоторой окрестности точки $x=a$, то $f(x)\cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

Две бесконечно малые функции называются **эквивалентными** (~), если предел их отношения равен 1. С помощью замечательных пределов можно доказать справедливость цепочки эквивалентных бесконечно малых
$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg} x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$ при $x \to 0$.

При раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ рекомендуется пользоваться указанными замечательными пределами либо пытаться сократить числитель и знаменатель на общие (критические) множители.

При вычислении пределов нередко пользуются **правилом Лопиталя:**

Пусть при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ возникает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, но при этом существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = B$.

Использование правила Лопиталя в большинстве случаев значительно упрощает вычисление пределов, поэтому, прежде чем приступать к вычислению пределов, необходимо повторить правила вычисления производных.

2.1. Вычисление пределов от рациональной дроби при $x \to a$ ($a \neq \infty$)

Если ищется предел от рациональной дроби, числитель и знаменатель которой обращается в нуль в предельной точке $x = a$, то такую дробь, согласно теореме Безу, всегда можно сократить на $x - a$.

Пример. Найти предел функций $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Решение. Заметим, что согласно свойствам 1 – 4 пределов

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6) = \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2 - \lim_{x\to 2}5\cdot\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}6 = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-12x+20) = \left(\lim_{x\to 2}x\right)^2 - 12\cdot\lim_{x\to 2}x + 20 = 4 - 12\cdot 2 + 20 = 0.$$

Мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Поступим так:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \frac{x-3}{x-10} \text{ при } x \neq 2. \text{ Следовательно,}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-10)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x-3}{\lim\limits_{x\to 2}x-10} = \frac{2-3}{2-10} = \frac{1}{8}.$$

Данный предел можно вычислить другим способом – с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-12x+20)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-12} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}.$$

2.2. Вычисление пределов от рациональной дроби при $x \to \infty$

При $x \to \infty$ мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Один из способов решения – это деление числителя и знаменателя на x^n (n – наивысшая степень числителя и знаменателя), другой способ – с помощью правила Лопиталя.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)$.

Решение. Наивысшая степень $n = 2$, следовательно, разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=3.$$

Решим вторым способом. Воспользуемся дважды правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2x+1)'}{(x^2+x+2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+2)'}{(2x+1)'}=3$$

2.3. Вычисление пределов, содержащих радикалы

При вычислении пределов, содержащих выражения вида $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, умножают числитель и знаменатель на сопряженное (с другим знаком) выражение, чтобы получить формулу сокращенного умножения.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)=1-1=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, то имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4}-1)(\sqrt{1+x^4}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4})^2-1^2}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^4-1}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^4}+1)}=\frac{0}{1+1}=0.$$

2.4. Вычисление пределов, содержащих тригонометрические функции

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, в зависимости от вида функции используют либо тригонометрические формулы, либо первый замечательный предел, либо эквивалентность бесконечно малых, либо правило Лопиталя, либо делают замену переменных.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Решение. Рассмотрим два способа решения.

1. С помощью замены:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\arcsin x = y\\ x=\sin y\\ y\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{2y}{3\sin y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}.$$

2. Использование эквивалентности бесконечно малых:

$\arcsin x \sim x$ при $x\to 0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного угла, а потом первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x}=1\cdot\frac{1}{2\cos 0}=\frac{1}{2}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, где $b\neq 0$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

2.5. Вычисление пределов от показательно-степенных функций

При вычислении пределов от показательно-степенной функции пользуются либо формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$, либо вторым замечательным пределом.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}}=$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^L=\left(\begin{array}{c}y=\dfrac{2}{x^2-1}\\ y\to 0\end{array}\right)=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^L=e^2, \text{ так как}$$

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Заметим, что $\cos x + \sin x \to 1$, а $\frac{1}{x}\to\infty$ при $x\to 0$. Следовательно, имеется неопределенность вида (1^{∞}). Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом. Получим, что

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+(\cos x+\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-1}{x}}=e,$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x+\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}}=\left(\begin{array}{c}\cos x+\sin x-1=y\\ y\to 0\end{array}\right)=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=1-1\cdot 0=1.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=\lim\limits_{x\to 0}e^{ctgx\cdot\ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}ctgx\cdot\ln(1+x^2)}$ в силу непрерывности e^x. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}ctgx\cdot\ln(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x}\cdot\cos x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\cos x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=e^0=1$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x+2}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)$=3, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{3x+2}\right)$=2, то в данном случае отсутствует неопределенность и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x+2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+1}{3x+2}}=3^2=9.$$

2.6. Вычисление пределов с учетом их особенностей

а) При вычислении пределов, содержащих логарифмические функции, часто используют свойства логарифмов и формулы (1) – (4).

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}]=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}]=1$$

согласно следствию замечательных пределов.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}a\cdot\dfrac{e^{ax}-1}{ax}-$

$$-\lim_{x\to 0}b\cdot\frac{e^{bx}-1}{bx}=a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}-b\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=|IV|=a\cdot 1-b\cdot 1=a\text{ - }b.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+\dfrac{x}{2})-\ln\dfrac{x}{2})$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+\dfrac{x}{2})-\ln\dfrac{x}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{2}{x}=2$.

б) При вычислении пределов от дробей метод деления на наивысшую степень используют не только для дробно-рациональных выражений.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{9}{x^3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{x^3}}}$.

Т.к. $\frac{1}{x}\to 0$ и $\frac{9}{x^3}\to 0$ при $x\to\infty$ (см. 2-е свойство бесконечно малых), то $\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{9}{x^3}}\to 0$ при $x\to\infty$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{9}{x^3}}}\to\infty$ (см. 1-е свойство бесконечно малых) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}=\infty$.

§3. Непрерывность функции. Точки разрыва

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если при $x\to a$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т.е. если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Этому определению равносильно следующее.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(a+\Delta x)-f(a)\big)=0$.

Функция $f(x)$ разрывна в точке $x = a$: 1) если не существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, или 2) функция $f(x)$ не определена в точке $x = a$, или 3) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) функция должна быть определена в некоторой δ - окрестности точки a и в самой точке a;
2) функция должна иметь одинаковые односторонние пределы, т.е.
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x);$$
3) односторонние пределы должны быть равны $f(a)$.

Если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, то точка $x = a$ называется **точкой устранимого разрыва** функции.

Точка $x = a$ называется **точкой разрыва 1-го рода** для $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$ в точке a и

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\neq \lim_{x\to a+0} f(x).$$

В противном случае имеем **точку разрыва 2-го рода**.

Скачком функции $f(x)$ в точке a называется разность ее односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)-\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если они различны.

В случае $f(a) = f(a+0)$ функция $f(x)$ **непрерывна справа в точке** $x = a$.

В случае $f(a) = f(a-0)$ функция $f(x)$ **непрерывна слева в точке** $x = a$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a \Leftrightarrow f(x)$ непрерывна в этой точке слева и справа.

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a,$ то $f(x) + g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ непрерывны в этой точке; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x = a,$ если $g(a) \neq 0$.

Функция называется непрерывной в интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Любая элементарная функция непрерывна в области определения.

Пример. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

а) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, б) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, в) $f(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0. \end{cases}$, г) $f(x)=\begin{cases} xe^x, x < 0; \\ 1-\cos x, 0 \le x < \pi; \\ x-2, x \ge \pi. \end{cases}$

Решение

а) При $x \neq 0 \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. $f(x)$ непрерывна при $x \neq 0$. Рассмотрим т. $x = 0$.

Вычислим $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow x = 0$- точка разрыва 2-го рода.

$f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \Rightarrow f(x)$ непрерывна слева в точке $x = 0$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 12.

б) Функция $f(x)$ определена при всех значениях x, кроме $x = 0$ (Dom $f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$). Следовательно, $x = 0$ - точка разрыва. Исследуем ее характер. Вычислим $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to0} 1 = 1, f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to0}(-1) = -1$.

Так как $f(+0) \neq f(-0)$, но $f(+0), f(-0) \in \mathbf{R}$, то $x = 0$ - точка неустранимого разрыва 1-го рода. При $x < 0 \quad f(x) = -1$, при $x > 0 \quad f(x) = 1 \Rightarrow$ при $x \neq 0 \quad f(x)$ непрерывна. График функции $f(x)$ изображен на рис. 13.

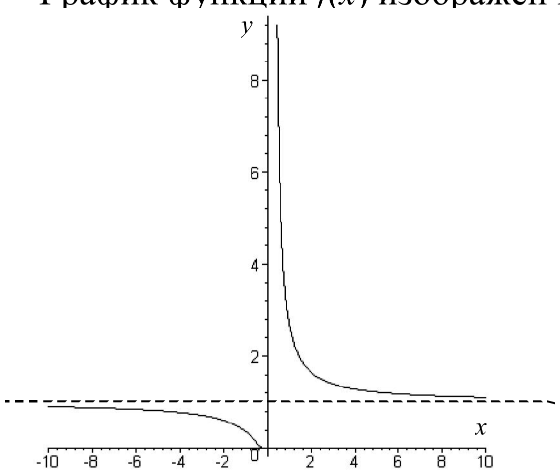

Рис. 12

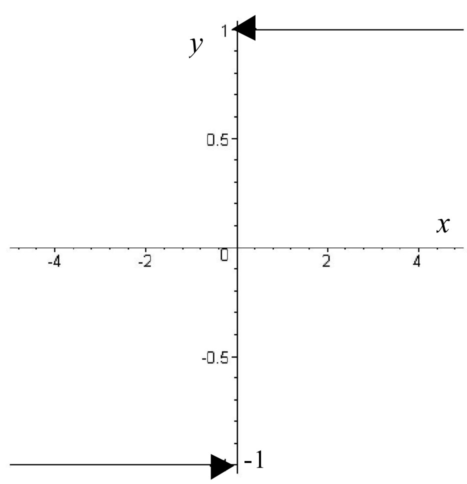

Рис. 13

в) При $x \neq 0 \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f(x)$ непрерывна в т. $x \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \neq f(0) = 1 \Rightarrow x = 0$ - точка устранимого разрыва.

Рассмотрев $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} = x^2$, т.е. изменив значение $f(x)$ в точке разрыва, получаем непрерывную функцию. График функции $f(x)$ изображен на рис. 14.

г) Поскольку элементарные функции xe^x, $1-\cos x$, $x-2$ непрерывны на **R**,то точками разрыва могут быть лишь $x=0$ и $x=\pi$. Имеем

$$f(x-0) = \lim_{x\to -0} xe^x = 0 = = \lim_{x\to +0}(1-\cos x) = f(x+0).$$

Значит, в точке $x=0$ функция $f(x)$ непрерывна.

Аналогично, $f(\pi-0) = \lim\limits_{x\to\pi-0}(1-\cos x) = 2$, $f(\pi+0) = \lim_{x\to\pi+0}(x-2) = \pi-2$. Тогда в точке $x=\pi$ функция имеет разрыв первого рода с величиной скачка $\pi-4$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 15.

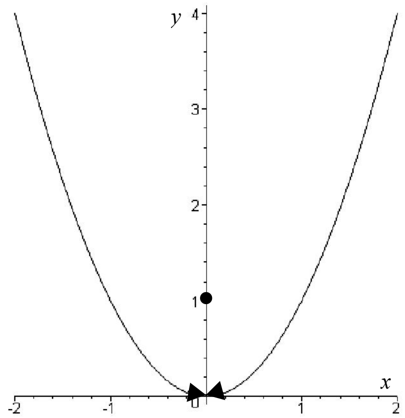

Рис. 14

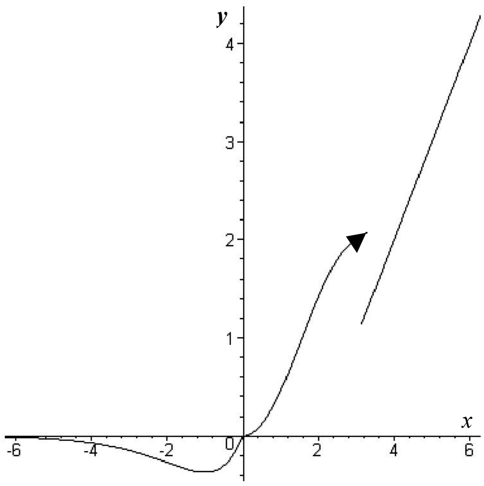

Рис. 15

Глава 6. Решение типовых задач контрольной работы № 1

Задача 1. Используя теорему Кронекера - Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений и решить её двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 7, \\ 2x + y - z = 4, \\ 3x + 3y - 2z = 10. \end{cases}$$

Решение

Найдем ранг r матрицы системы методом окаймляющих миноров. Рассмотрим минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r \geq 2$. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=-2+12+6-6-8+3=5\neq 0\ \Rightarrow\ r=3.$$

Ранг расширенной матрицы системы также равен трем, поскольку система содержит три уравнения, а ранг матрицы системы равен трем. Следовательно, согласно теореме Кронекера - Капелли, система совместна.

Первый способ решения (метод Гаусса)

Умножим первую строку на (–2) и результат прибавим ко второй, потом умножим первую строку на (–3) и результат прибавим к третьей:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 7\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 3 & 3 & -2 & 10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 5 & -5 & -10\\ 0 & 9 & -8 & -11\end{pmatrix}\to$$

Разделим вторую строку на 5, потом умножим ее на (–9) и результат прибавили к третьей:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 9 & -8 & -11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы имеем $z = 7$; $y - z = -2$, $y = 5$; $x - 2y + 2z = 7$, $x = 3$.

Второй способ решения

Найдем алгебраические дополнения матрицы системы:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1,\ \ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1,\ \ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=3,\ \ A_{21}=2,$

$A_{22}=-8,\ \ A_{23}=-9,\ \ A_{31}=0,\ \ A_{32}=5,\ \ A_{33}=5.$

Запишем присоединенную матрицу и транспонируем ее:

$$A^V=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -8 & -9\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix},\ \ \left(A^V\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & -9 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left(A^V\right)^T\cdot B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & -9 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 4\\ 10\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7+8+0\\ 7-32+50\\ 21-36+50\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 7\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

Задача 2. Даны векторы $\vec a\,\{1;2;3\}$, $\vec b\,\{2;2;5\}$, $\vec c\,\{3;1;4\}$ и $\vec d\,\{4;3;7\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec d$ в этом базисе.

Решение. Три вектора образуют базис, если $\vec a\,\vec b\,\vec c\neq 0$.

$$\vec a\,\vec b\,\vec c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=8+30+6-18-5-16=5=\Delta\neq 0.$$

Найдем координаты вектора $\vec d$ в базисе $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$.

$$\vec d=n\vec a+m\vec b+p\vec c.$$

Два вектора равны, если их соответствующие координаты равны.

$$\begin{cases} n + 2m + 3p = 4, \\ 2n + 2m + \ \ p = 3, \\ 3n + 5m + 4p = 7. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 5;$$

$$n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = 1, \ m = \frac{\Delta_m}{\Delta} = 0, \ p = \frac{\Delta_p}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$.

Задача 3. Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(6; 5; -4)$, $B(1; -2; -4)$, $C(5; 6; -4)$ и $D(-1; -2; 0)$. Найти: 1) координаты точки пересечения медиан треугольника ABC; 2) уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно медиане, проведенной из вершины B треугольника ABC; 3) координаты точки, симметричной точке A относительно плоскости BCD. Сделать чертёж.

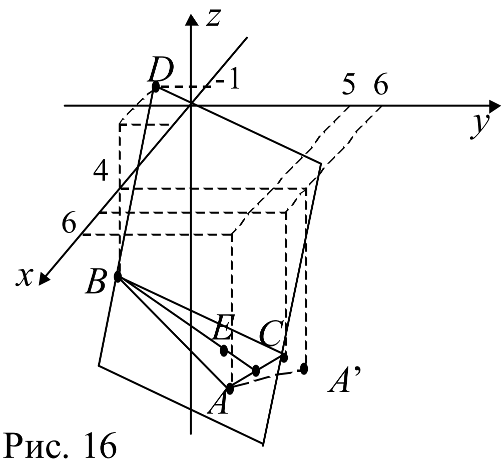

Рис. 16

Решение

1) Найдем координаты т. F середины отрезка AC (рис. 16): $x_F = (x_A + x_C)/2 = 5{,}5$, $y_F = (y_A + y_C)/2 = 5{,}5$, $z_F = (z_A + z_C)/2 = -4$, $F(5{,}5; 5{,}5; -4)$.

Точка E пересечения медиан треугольника делит медиану BF в отношении $\lambda = 2{:}1$, считая от вершины B. Найдем координаты точки E:
$x_E = (x_B + \lambda x_F)/(1+\lambda) = 4$,
$y_E = (y_B + \lambda y_F)/(1+\lambda) = 3$,
$z_E = (z_B + \lambda z_F)/(1+\lambda) = -4$, $E(4; 3; -4)$.

2) Найдем направляющий вектор прямой BE: $\overrightarrow{BE}\,\{x_E - x_B; y_E - y_B; z_E - z_B\} = \{3; 5; 0\}$. Уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно прямой BE:

$$\frac{x - x_A}{x_E - x_B} = \frac{y - y_A}{y_E - y_B} = \frac{z - z_A}{z_E - z_B}, \qquad \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+4}{0}.$$

3) Найдем уравнение плоскости BCD:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+4 \\ 4 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32(x-1) - 16(y+2) + 16(z+4) = 0.$$

Найдем каноническое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости BCD и проходящей через т. A: $(x - 6)/2 = (y - 5)/(-1) = z + 4$. Запишем каноническое уравнение прямой в параметрическом виде: $x = 2t + 6$, $y = -t + 5$, $z = t - 4$.

Найдем координаты точки H пересечения плоскости BCD и найденной прямой: $2(2t + 5) - (-t + 7) + t = 0$, $t = -0{,}5$; $x_H = 5$, $y_H = 5{,}5$, $z_H = -4{,}5$.

Координаты точки *A'*, симметричной точке *A* относительно плоскости *BCD* – *A*'(4; 6; –5).

Ответ: 1) координаты точки пересечения медиан *E*(4; 3; –4); 2) уравнение прямой $\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z+4}{0}$; 3) координаты симметричной точки *A*'(4; 6; –5).

Задача 4. Линия задана уравнением $r = 5/(6 + 3\cos\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, привести его к каноническому виду; 3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия.

Решение

1) Вычисляя значения *r* с точностью до сотых при указанных значениях φ, получим таблицу:

φ^o	0	22,5°	45°	67,5°	90°	112,5°	135°	157,5°	180°
φ^o	360°	337,5°	315°	292,5°	270°	247,5°	225°	202,5°	
$\cos\varphi$	1,00	0,92	0,71	0,38	0,00	–0,38	–0,71	–0,92	–1,00
r	0,56	0,57	0,62	0,70	0,83	1,03	1,29	1,54	1,67

Используя полученные табличные значения, построим кривую в полярной системе координат (рис. 17).

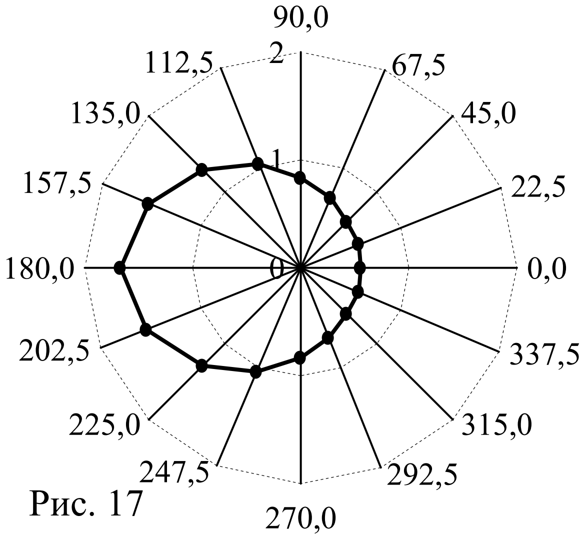

Рис. 17

2) Используя формулы перехода $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r^2 = x^2 + y^2$ из полярной в декартовую систему координат, получим: $6\sqrt{x^2+y^2} = 5-3x$.

Возведем левую и правую части в квадрат: $27x^2 + 36y^2 + 30x = 25$. Выделим полный квадрат и приведем к каноническому виду: $\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $c = 5/9$; $a^2 = 100/81$; $b^2 = 25/27$.

3) Это эллипс, смещенный на $(-c)$ вдоль оси *OX*.

Ответ: эллипс $\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $c = 5/9$, $a^2 = 100/81$, $b^2 = 25/27$.

Задача 5. Задана функция $f(x)=\begin{cases}-0.5x+1, & x\le -2;\\ x^2-2, & -2<x<1;\\ \ln x, & x\ge 1.\end{cases}$

Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

Решение. Неэлементарная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Она может иметь разрыв в точках $x = -2$ и $x = 1$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x. Исследуем точки $x = -2$ и $x = 1$:

а) $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-2-0}(-0{,}5x+1) = 2, \qquad \lim\limits_{x\to-2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-2+0}(x^2-2) = 2$.

Следовательно, в точке $x = -2$ выполняются все условия непрерывности, поэтому в этой точке функция $f(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1-0}(x^2-2) = -1, \quad \lim\limits_{x\to1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to1+0} \ln x = 0$.

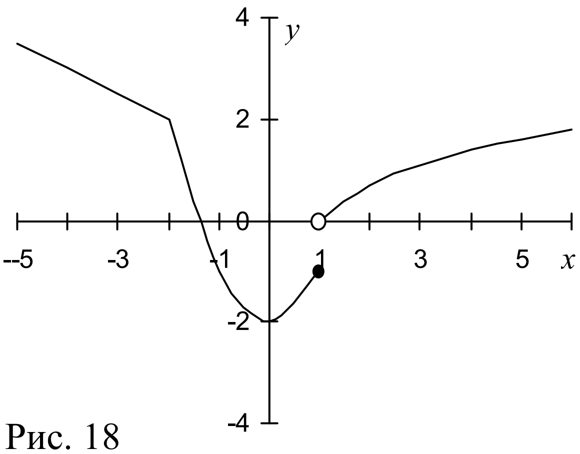

Рис. 18

Левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, поэтому в точке $x = 1$ функция имеет разрыв (конечный). Скачок функции в точке разрыва конечный $f(1+0) - f(1-0) = 1$.

График функции приведен на рис. 18.

Ответ: функция имеет конечный разрыв в точке $x = 1$, ее скачок равен 1.

Задача 6. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,3x}{x\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Решение

а) Разделив числитель и знаменатель на большую степень x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x^2+2/x^3}{4/x^3-1/x+1} = 2;$$

б) Умножив числитель и знаменатель на $45x$ и используя первый замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2\,3x}{x\sin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{9}{5\cos^2 3x}\right) = \frac{9}{5};$$

в) Логарифмируя и используя правило Лопиталя, получим $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \left(0^0\right) = A$,

$$\ln A = \lim_{x\to+0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}(-x) = 0, \ A = 1;$$

г) Сделав замену переменных и используя второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}} = \left[1^\infty\right] = \left|\begin{matrix}2x-1=1+t,\\ x\to1, \quad t\to0\end{matrix}\right| = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4+2t}{t}} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4}{t}}(1+t)^2 = e^4.$$