Методические указания к выполнению контрольной работы № 2
«*Производная и ее приложения. Приложения дифференциального исчисления*»

§1. Производная. Приложения дифференциального исчисления

Производной функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ называется величина $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. При решении задач следует твердо знать таблицу производных и правила дифференцирования функций.

§2. Таблица производных

1) $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ (n - постоянное число);

2) $(\sin x)'=\cos x$;

3) $(\cos x)'=-\sin x$;

4) $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

5) $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

8) $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

9) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

10) $\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\quad (a>0)$;

$\left(e^x\right)'=e^x$;

11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad (a>0,\ a\neq 1)$;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

12) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;

13) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;

14) $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

§3. Правила дифференцирования

Если C - постоянная величина и функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют производные, то

а) $C'=0$;

б) $(Cu)'=Cu'$;

в) $\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$;

г) $(uv)'=u'v+v'u$;

д) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

е) $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$ (n - постоянное число);

ж) Если задана сложная функция $y = f\left(u\left(x\right)\right)$ и функции $y = f\left(u\right)$, $u = \varphi\left(x\right)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u u'_x$.

Производные **показательно-степенных** функций вычисляют по формуле

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = \left(u(x)\right)^{v(x)} v'(x)\ln u(x) + \left(u(x)\right)^{v(x)-1} v(x)u'(x).$$

Производная второго порядка от функции $y = f\left(x\right)$ определяется как $f''\left(x\right) = f^{(2)}\left(x\right) = \left(f'\left(x\right)\right)'$. Аналогично определяются производные высших порядков $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, n = 3, 4, …

§4. Дифференциал функции

Если приращение функции $y = f\left(x\right)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде $\Delta y = A\left(x\right)\Delta x + o\left(dx\right)$, где $dx = \Delta x$, то главная линейная часть этого приращения называется **дифференциалом** функции y: $dy = A\left(x\right)dx$. Для существования дифференциала функции $y = f\left(x\right)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'\left(x\right)$, причем имеем $dy = y'dx$. Последняя формула будет верна и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (свойство инвариантности первого дифференциала). Дифференциалы высших порядков от функции $y = f\left(x\right)$ последовательно определяются формулами $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$, n = 2, 3, …, где принято $d^1 y = dy = y'dx$. Если x - независимая переменная, то полагают $d^2 x = d^3 x = ... = 0$. В этом случае справедливы формулы $d^n y = y^{(n)}dx^n$ и $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

§5. Производная обратной функции

Дифференцируемая функция $y = f\left(x\right)$ $(a < x < b)$ с производной $f'\left(x\right) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}\left(y\right)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

§6. Производная функции, заданной параметрически

Система уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases}$ где $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ - дифференцируемые функции и $\varphi'\left(t\right) \neq 0$, определяет y в некоторой области как однозначную дифференцируемую функцию от x: $y=\phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, причем производная этой функции может быть найдена по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Для вычисления второй производной y''_{xx} используют формулу $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx}=\dfrac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}$.

§7. Производная функции, заданной в неявном виде

Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x,y)=0$, то производная $y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $\dfrac{d}{dx}\left[F(x,y)\right]=0$, где $F(x,y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

Задача 7. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $y=\ln(\arcsin x)\cdot\cos^3\sqrt{x+1}$;

в) $y=x^{\sin^2 x}$;

г) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=0$.

Решение

а) Комбинируя правила нахождения производных сложной функции и частного, получим

$$y'=\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{1-x^2+3x(x+1)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}=\frac{2x^2+3x+1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

б) Комбинируя правила нахождения производных сложной функции и произведения функций, будем иметь

$$y'=(\arcsin x)^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos^3\sqrt{x+1}+\ln(\arcsin x)\cdot 3\cos^2\sqrt{x+1}\cdot\left(-\sin\sqrt{x+1}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

в) Запишем данную функцию в виде $y=e^{\sin^2 x\cdot\ln x}$ и применим правило дифференцирования сложной функции:

$$y'=e^{\sin^2 x\cdot\ln x}\left[2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x+\sin^2 x\cdot\frac{1}{x}\right]=e^{\sin^2 x\cdot\ln x}\sin x\cdot\left[2\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right].$$

г) Продифференцируем обе части тождества по x, считая $y = y(x)$.

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right)-\frac{x+yy'}{(x^2+y^2)}=\frac{y'x-y-x-yy'}{(x^2+y^2)}=0.$$

Следовательно, числитель последней дроби равен нулю: $y'(x-y)-(y+x)=0.$ В итоге получаем $y'=\dfrac{x+y}{x-y}.$

Задача 8. Найти dy/dx и d^2y/dx^2 для заданных функций:

а) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

б) $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^2 - t. \end{cases}$

Решение

а) $y' = e^{arctgx}\left(1+x^2\right)^{-1}$;

$$y'' = e^{arctgx}\left(1+x^2\right)^{-2} - 2x\left(1+x^2\right)^{-2} e^{arctgx} = e^{arctgx}\left(1+x^2\right)^{-2}\left(1-2x\right).$$

б) Применим правила нахождения производных от функции, заданной параметрически $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-1}{3t^2+1}$. Так как $x'_t = 3t^2+1$, $y'_t = 2t-1$, $x''_{tt} = 6t$, $y''_{tt} = 2$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6t^2+2-12t^2+6t}{\left(3t^2+1\right)^3}=\frac{-6t^2+6t+2}{\left(3t^2+1\right)^3}.$$

§8. Монотонность и экстремумы

1. Если $\forall x \in (a,b) f'(x) \geq 0\ (\leq 0) \Rightarrow f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b).

2. Пусть $\exists O(x_0)$ $f(x_0) = \max\limits_{x\in O(x_0)} f(x)$, тогда $f(x_0)$ - (локальный) максимум $f(x)$ $\left(f(x_0) = f_{\max}\right)$

3. Пусть $\exists O(x_0)$ $f(x_0) = \min\limits_{x\in O(x_0)} f(x)$, тогда $f(x_0)$ - (локальный) минимум $f(x)$ $\left(f(x_0) = f_{\min}\right)$

4. **Теорема Ферма.** Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в т. x_0 и $\exists\ f'(x_0)$,то $f'(x_0) = 0$.

5. **Теорема Лагранжа.** Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то $\exists\zeta \in (a,b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b-a)$ (формула конечных приращений).

6. **Теорема Ролля.** Если выполнены условия теоремы Лагранжа и $f(b) = f(a)$, то $\exists\zeta \in (a,b)$: $f'(\zeta) = 0$.

7. **Теорема Коши.** Если $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), причем $g'(x) \neq 0$, то $\exists\zeta \in (a,b)$ такая, что верна формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения (экстремумы) непрерывной и дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (которые существуют по теореме Вейерштрасса) нужно: 1) найти значения функции во всех точках, где $f'(x)=0$; 2) сравнить их со значениями функции на концах отрезка; 3) среди этих чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, где $f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$, $[a,b]=[-3;6]$.

Решение. Заметим, что $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на данном отрезке. Вычисления дают:

1) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x-36=0 \Leftrightarrow x=-2, x=3$ (обе точки лежат внутри данного промежутка).

2) Находим $f(-2)=36, f(3)=-89$.

3) Вычисляем значения функции на концах промежутка:

$$f(-3)=19, f(6)=100.$$

4) В итоге имеем: $\max\limits_{[-3,6]} f(x)=\max\{19,36,-89,100\}=100=f(6)$,

$$\min\limits_{[-3,6]} f(x)=\min\{19,36,-89,100\}=-89=f(3).$$

§9. Построение графиков функций

Общая схема исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции ($Dom\, f$). Исследовать поведение $f(x)$ в граничных точках $Dom\, f$.

2. Установить, не является ли $f(x)$ четной (или нечетной).

3. Является ли $f(x)$ периодической?

4. Исследовать $f(x)$ на непрерывность. Найти точки разрыва и установить их характер. Указать вертикальные асимптоты.

5. Найти уравнения наклонных асимптот.

6. Найти нули $f(x)$, т.е. x: $f(x)=0$, и $y=f(0)$. Найти интервалы знакопостоянства.

7. Вычислить $f'(x)$. Исследовать $f(x)$ на монотонность и экстремумы.

8. Вычислить $f''(x)$. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

9. Свести результаты в таблицу, добавить значения функции в характерных точках (экстремума, перегиба и т.д.) и построить эскиз графика $f(x)$.

К числу характерных точек графика относятся точки пересечения его с осями координат. В случае непрерывной функции $f(x)$ для нахождения абсцисс точек пересечения графика с осью Ox нужно найти корни уравнения $f(x)=0$, лежащие в области существования графика. Удаляя из этой области найденные точки, получим разбиение области определения функции на интервалы знакопостоянства.

Из теоремы Ферма следует, что в точках локального экстремума непрерывной функции $f'(x)=0$, если производная существует. Точки, удовлетворяющие этому условию, называются критическими точками функции $f(x)$. Достаточные условия локального экстремума в критической точке x_0 заключаются в смене знака $f'(x)$ при переходе через эту точку из левой ее полуокрестности в правую. При этом смена знака с $(+)$ на (–) отвечает максимуму, а смена знака с (–) на (+) – минимуму. Другой достаточный признак экстремума связан со знаком второй производной в критической точке. Если дважды дифференцируемая функция такова, что $f'(x_0)=0$ $,f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимума. Если же $f'(x_0)=0$ $,f''(x_0)>0$, то x_0- точка локального минимума. На практике для нахождения интервалов монотонности нужно удалить из области определения функции все точки локального экстремума. Оставшееся множество состоит из интервалов монотонности. О возрастании и убывании функции на этих интервалах можно судить по знаку $f'(x)$.

Дуга графика на интервале (a,b) называется выпуклой вверх, если она расположена под каждой касательной к ней. Достаточным условием выпуклости вверх является $f''(x)\le 0$ для всех $x\in(a,b)$. Аналогично, дуга графика на интервале (a,b) называется выпуклой вниз, если она расположена над каждой касательной к ней. Достаточным условием выпуклости вниз является $f''(x) \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Точки перегиба на графике дифференцируемой функции обладают свойством: по обе стороны от них график имеет разное направление выпуклости. Достаточным условием перегиба является существование $f''(x)$ в окрестности точки x_0 и смена знака $f''(x)$ при переходе через точку x_0. При этом $f''(x_0)=0$.

Вертикальные асимптоты к графику функции $f(x)$ - это прямые вида $x=a$, такие, что хотя бы один из односторонних пределов этой функции при $x\to a$ равен бесконечности. Это может иметь место в точках разрыва второго рода либо в граничных точках области определения функции. Наклонная асимптота при $x\to+\infty$ - это прямая $y=kx+b$,

где $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$. Аналогично определяется наклонная асимптота при $x\to-\infty$. Наклонные асимптоты возможны только в случае, когда область определения функции не ограничена.

Задача 10. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график:

а) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, б) $f(x)=xe^{-x^2/2}$.

Решение

а) 1. Очевидно, что $Dom\, f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

2. $f(-x) = \dfrac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = -\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. Заметим, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция x^2 не является периодической , поскольку $\forall\ T \neq 0$ $(x+T)^2 = x^2 + 2xT + T^2 \neq x^2$.

Аналогично убеждаемся в том, что x^3 не является периодической функцией. Следовательно, $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ не является периодической функцией.

4. $x = -1 \notin Dom\, f \Rightarrow x = -1$ - точка разрыва. Найдем $f(-1 \pm 0)$.

$f(-1 \pm 0) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow$ прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

5. Найдем уравнения наклонных асимптот. Вычисления дают:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} =$$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5 \Rightarrow y = x - 5$ - наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

6. Заметим, что $f(0) = -1$ и $f(x) = 0$ при $x = 1$.

7. Находим: $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 (x+5)}{(x+1)^3}$. Тогда, исследуя знаки $f'(x)$ методом интервалов, заключаем, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty, -5)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ и убывает на $(-5, -1)$. Таким образом, в точке $x = -5$ $f(x)$ имеет экстремум: $f_{\max} = f(-5) = -13{,}5$. В точке $x = 1$ экстремума нет (почему мы не рассматриваем точку $x = -1$?). Однако указанные особенности поведения функции еще не позволяют нам однозначно судить о виде графика $f(x)$. Очевидно, что окончательный ответ на этот вопрос мы можем получить, только исследовав промежутки выпуклости $f(x)$.

8. Находим: $f''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Точка возможного перегиба – $x = 1$, интервалы выпуклости – $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $[1, +\infty)$. Установим знаки $f''(x)$ на каждом из этих интервалов. Заключаем, что $f(x)$ выпукла вверх на $(-\infty, -1]$ и $(-1, 1]$ и выпукла вниз на $[1, +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

9. Сведем полученные данные в таблицу 1. Добавим значение $f(10) = 6{,}05$.

Таблица 1

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$	-	-13,5	-	$-\infty$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	не сущ.	+	0	+
$f''(x)$	-	0	-	не сущ.	-	0	+
Выводы	Функция возрастает	Точка максимума	Функция убывает	Точка разрыва 2-го рода	Функция возрастает	Точка перегиба	Функция возрастает

Эскиз графика $f(x)$ представлен на (рис. 19).

б) 1. Функция определена и непрерывна на **R**.

2. Функция нечетная: $f(-x) = -xe^{-(-x)^2/2} = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

3. Не периодическая.

4. Точек разрыва нет, следовательно, нет вертикальных асимптот.

5. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$$

(предел находится по правилу Лопиталя). Итак, наклонная асимптота имеет уравнение $y = 0$.

6. Очевидно, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. График проходит через начало координат и других общих точек с осями координат не имеет. На $(-\infty,0)$ имеем $f(x) < 0$, следовательно, график расположен ниже оси абсцисс. На $(0,+\infty)$ имеем $f(x) > 0$, следовательно, график расположен выше оси абсцисс.

7. Исследуем функцию с помощью $f'(x)$. Имеем $f'(x) = e^{-x^2/2}(1-x^2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$ - критические точки. На $(-\infty,-1) u (1,+\infty)$ функция убывает, так как $f'(x) < 0$. На $(-1,1)$ функция возрастает, так как $f'(x) > 0$. Следовательно, $x = -1$ - точка минимума, $f(-1) = -e^{-1/2}$; $x = 1$ - точка максимума, $f(1) = e^{-1/2}$.

8. Исследуем функцию с помощью $f''(x)$. Имеем $f''(x) = e^{-x^2/2}(x^3 - 3x)$. Отсюда $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = -\sqrt{3}, x_0 = 0, x_4 = \sqrt{3}$ - точки возможного перегиба. На $(-\infty,-\sqrt{3}) u (0,\sqrt{3})$ $f''(x) < 0$ - график выпуклый вверх. На интерва-

лах $\left(-\sqrt{3},0\right) u \left(\sqrt{3},+\infty\right)$ $f''(x)>0$ - график выпуклый вниз. Точки перегиба x_0, x_3, x_4. Значения функции в этих точках $f\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\sqrt{3}e^{-3/2}$, $f(0)=0$.

9. Сводим результаты исследования в таблицу 2, пользуясь нечетностью функции, и строим эскиз графика (рис. 20).

Таблица 2

x	$(0,1)$	1	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
$f(x)$	+	$e^{-1/2}$	+	$\sqrt{3}e^{-3/2}$	+
$f'(x)$	+	0	-	$-2e^{-3/2}$	-
$f''(x)$	-	$-2e^{-1/2}$	-	0	+
Выводы	Функция возрастает	Точка максимума	Функция убывает	Точка перегиба	Функция убывает

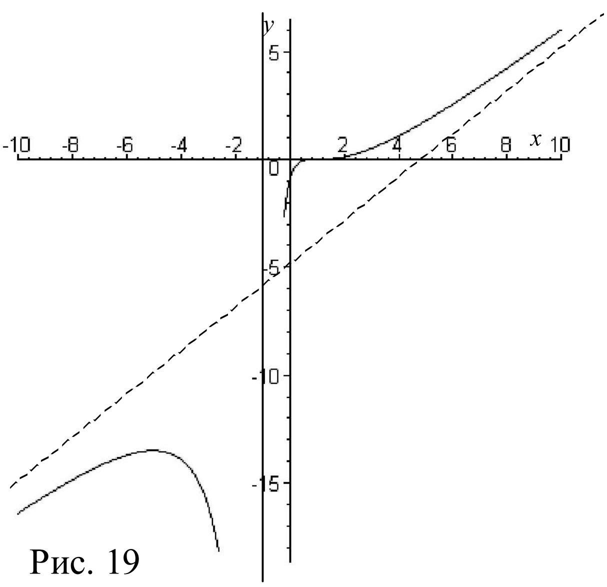

Рис. 19

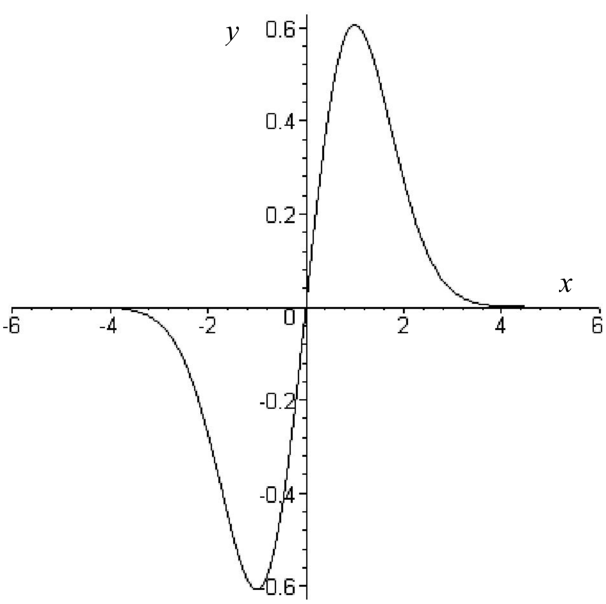

Рис. 20

Задача 11. Дан прямой круговой конус K с радиусом основания R, образующая его наклонена к плоскости основания под углом α. Требуется вписать в K прямой круговой конус Q наибольшего объема при условии, что вершина Q совпадает с центром основания конуса K.

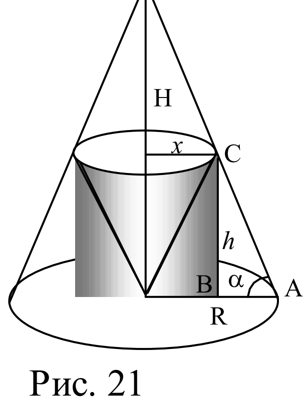

Рис. 21

Решение. Сделаем чертеж (рис. 21). Рассмотрим осевое сечение конуса K. Пусть x - радиус основания вписанного конуса. Его высота h находится из прямоугольного треугольника ABC. Так как $AB=R-x$, то $h=(R-x)tg\alpha$. Итак, объем вписанного конуса $V(x)=\frac{1}{3}\pi x^2(R-x)tg\alpha$. Найдем максимум этой функции на промежутке $0\le x\le R$. Производная

$V'(x)=\frac{1}{3}\pi tg\alpha\left(2Rx-3x^2\right)$. Отсюда $x=0$ или $x=\dfrac{2}{3}R$. При $x=0$ объем конуса Q равен нулю. При переходе через вторую критическую точку производная $V'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Значит, объем конуса будет максимальным при $x=\dfrac{2}{3}R$.

Ответ: $V_{\max}=\dfrac{4}{81}\pi R^3 tg\alpha$. Объем конуса Q составляет $\dfrac{4}{27}$ объема конуса K.

§10. Уравнение касательной в точке $r(t_0)$, уравнение нормальной плоскости, проходящей через $r(t_0)$ и кривизна кривой Γ в точке $r(t_0)$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, $t\in[a,b]$

Касательный вектор к кривой Γ в точке $r(t_0)$ определяется по формуле $\vec{r'}(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$. Предполагается, что $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ существуют и одновременно не равны нулю. Тогда искомые уравнения касательной имеют вид

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Соответственно уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$x'(t_0)\big(x-x(t_0)\big)+y'(t_0)\big(y-y(t_0)\big)+z'(t_0)\big(z-z(t_0)\big)=0.$$

Кривизна кривой Γ в точке $r(t_0)$ есть величина $k=\dfrac{\left|r'(t_0)\times r''(t_0)\right|}{\left|r'(t_0)\right|^3}$.

Задача 12. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\vec{r}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}+e^t\cdot\vec{k}$ в точке $t_0=0$.

Решение. Вычисления дают $x(t_0)=1,\ y(t_0)=0,\ z(t_0)=1$,
$x'(t_0)=0,\ y'(t_0)=1,\ z'(t_0)=1,\quad x''(t_0)=-1,\ y''(t_0)=0,\ z''(t_0)=1$.

Искомые уравнения касательной $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Искомое уравнение нормальной плоскости $0(x-1)+1(y-0)+(z-1)=0$ то есть $y+z-1=0$. Найдем числитель в формуле для кривизны $r'(t_0)\times r''(t_0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Длина этого вектора равна $\sqrt{3}$. Длина вектора $r'(t_0)$ равна $\sqrt{2}$. Подставляя эти значения в формулу для кривизны, получим $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.