Методические указания к выполнению контрольной работы № 3 «*Неопределенный и определенный интегралы*»

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому основные формулы интегрирования получают из формул дифференцирования. Отыскание неопределенного интеграла некоторой функции называется интегрированием.

Сравнивая операции дифференцирования и интегрирования функций, сделаем два замечания:

1. Если для дифференцируемости функции в точке непрерывность функции в этой точке является условием необходимым, но недостаточным, то для интегрируемости функции на отрезке, наоборот, непрерывность функции на этом отрезке является только условием достаточным, но не необходимым.

2. Каждая дифференцируемая функция имеет единственную производную, а операция интегрирования многозначна, так как функция имеет одну первообразную на отрезке, то она имеет и бесконечное множество первообразных на этом отрезке, отличающихся одна от другой на постоянное число.

§1. Определение и основные свойства неопределенных интегралов

Первообразной функцией $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, если в каждой точке этого интервала $F'(x) = f(x)$.

Нетрудно доказать, что первообразные функции $f(x)$, и только они, содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Если $F(x)$ – непрерывная функция $f(x)$ в некотором интервале, то выражение $F(x) + C$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Интегрирование проверяется дифференцированием, поэтому

$$d(F(x) + C) = f(x)dx \quad \text{или} \quad (F(x) + C)' = f(x).$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Действия интегрирования и дифференцирования являются взаимно обратными: $\int d\big(f(x)\big) = f(x) + C$, в частном случае

$$\int dx = x + C; \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx; \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Постоянный множитель, стоящий под знаком интеграла, можно вынести за знак интеграла: $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, где C – константа.

3. Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx.$$

Приведем таблицу интегралов, на которую мы в дальнейшем будем ссылаться.

1) $\int dx = x + C$.

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10) $\int e^x dx = e^x + C$.

11) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

14) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

15) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

16) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

17) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

18) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

19) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.

20) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

21) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|\, x + \sqrt{x^2+k}\,| + C$.

22) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.

23) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

24) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

25) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

Часто при вычислении интегралов используют следующее равенство: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Этот прием позволяет упростить вычисление ряда интегралов.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int e^{3x+1}dx$.

Решение. $J = \int e^{3x+1}dx = \dfrac{1}{3}\int e^{3x+1}d(3x+1) = \dfrac{1}{3}e^{3x+1} + C$.

Ответ: $J = \dfrac{1}{3}e^{3x+1} + C$.

§2. Интегрирование путем подстановки

2.1. Подведение под знак дифференциала

По определению дифференциала:

$$f'(x)dx = d\big(f(x)\big).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют подведением множителя $f'(x)$ под знак дифференциала.

Например:

1. $2x\,dx = d(x^2)$
2. $\sin x\,dx = -\,d(\cos x)$
3. $\cos x\,dx = d(\sin x)$
4. $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$
5. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$ и т.д.

Справедлива формула

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \int f\big(\varphi(x)\big)d\varphi(x) = \int f(u)\,du\,.$$

В данной контрольной работе составлены примеры на эту формулу в задаче 13(а).

Задача 13(а). Найти неопределенные интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$, 2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$, 3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$.

Решение

1. $\displaystyle J = \int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x\frac{dx}{x} = \int \ln^2 x\,d(\ln x)$.

Пусть $u = \ln x$, тогда $\displaystyle J = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. Переходя к первоначальной переменной x, окончательно получим $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Сделаем проверку:

$\displaystyle\left(\frac{\ln^3 x}{3} + C\right)' = \frac{3\ln^2 x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{x}$ - это подынтегральная функция. Следовательно, интеграл вычислен верно.

Ответ: $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C$.

2. $\displaystyle J = \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\,d(\operatorname{arctg} x) = \int \big(\operatorname{arctg} x\big)^{\frac{1}{3}} d(\operatorname{arctg} x)$.

Здесь, очевидно, $\operatorname{arctg} x = u$. При некотором навыке замена функции через u обычно происходит устно.

$$J=\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{u^{\frac{4}{3}}}{4/3}+C=\frac{(\operatorname{arctg}x)^{\frac{4}{3}}}{4/3}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}+C.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x}+C$.

3. $J=\int\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt[4]{e^x+1}}=\int(e^x+1)^{-\frac{1}{4}}d(e^x+1)=\left|\begin{matrix}\text{Пусть}\\ u=e^x+1\end{matrix}\right|=\int u^{-\frac{1}{4}}du=\frac{u^{-\frac{1}{4}+1}}{3/4}=$

$=\frac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}}+C$.

Ответ: $\frac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}}+C$.

2.2. Интегрирование по частям

Метод опирается на равенство

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Для применения этого метода подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. При этом целесообразно в качестве *u* выбирать функцию, упрощающуюся при дифференцировании ($\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$).

Интегрированием по частям легко решаются интегралы вида:

1. $\int x^n \ln x\,dx$,	$u=\ln x$;	4. $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$,	$u=\operatorname{arctg} x$;
2. $\int x^n \arcsin x\,dx$,	$u=\arcsin x$;	5. $\int x^n e^x\,dx$,	$u=x^n$;
3. $\int x^n \sin x\,dx$,	$u=x^n$;	6. $\int x^n \cos x\,dx$,	$u=x^n$.

Задача 13(б). Найти неопределенный интеграл $\int x^2e^{3x}\,dx$.

Решение. Все интегралы вычисляются с помощью интегрирования по частям:

$$J=\int x^2e^{3x}\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2, & dv=e^{3x}dx\\ du=2xdx, & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=x^2\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx=$$

$$=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx.$$

Для вычисления интеграла $\int xe^{3x}\,dx$ применим еще раз интегрирование по частям: $\int xe^{3x}\,dx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=e^{3x}dx\\ du=dx, & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{e^{3x}}{9}+C$.

Тогда $J=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2x}{9}e^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C=e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}\right)+C$.

Ответ: $e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2}{27}\right)+C$.

2.3. Указания к решению задач 13 в, г, д, е

В предлагаемой литературе, приведенной в контрольном задании, подробно рассмотрены основные классы интегрируемых функций. Изучите примеры и методы их интегрирования.

В задаче 13(в) представлены интегралы вида:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$,
2. $\displaystyle\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$,
3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,
4. $\displaystyle\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$,

которые легко свести к одному из табличных интегралов №16 - 21. Для этого необходимо уметь выделять полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q.$$

Задача 13(в). Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x-1}}\,dx$.

Решение. Выделим полный квадрат: $x^2+4x-1=(x+2)^2-5$.

$$\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x-1}}\,dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{(x+2)^2-5}}\,dx=\left|\begin{matrix}x+2=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t+2}{\sqrt{t^2-5}}dt=$$

$$=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-5}}+2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-5)}{\sqrt{t^2-5}}+2\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|=\sqrt{t^2-5}+2\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+4x-1}+2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-1}\right|+C.$$

Задача 13(г). Найти неопределенный интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$.

Решение. В задаче 13(г) используется схема интегрирования рациональных дробей. Дробь $\dfrac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$ рациональная, правильная (степень числителя меньше степени знаменателя), поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей, а именно:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество:

$x^2-3x+2=A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx$,

$x^2-3x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$.

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны, поэтому получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A+B+C=-3, \\ A=2, \end{cases}$$

откуда $A = 2$, $B = -1$, $C = -6$.

Прием, с помощью которого найдены неизвестные A, B, C, называется способом сравнения коэффициентов.

Для определения коэффициентов часто бывает удобнее применить способ частных значений, состоящий в том, что после приравнивания числителей аргументам x придают некоторые удобные значения (читайте литературу).

Итак, $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{-6}{(x+1)^2}dx =$

$$= 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} - 6\int (x+1)^{-2} d(x+1) = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C.$$

Ответ: $2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C$.

Задача 13(д). Найти неопределенный интеграл $J = \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

Решение. В задаче 13(д) представлен интеграл, который надлежащей заменой переменной может быть сведен к интегралам от рациональных функций.

Так как $\sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{3}}$, то наименьший общий знаменатель равен 6. Следовательно, сделаем замену:

$x + 3 = t^6$, $x = t^6 - 3$, $dx = 6t^5dt$, $t = \sqrt[6]{x+3}$.

Тогда $J = \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}} \cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}dt$.

Дробь $\frac{t^8}{1+t^2}$ рациональная, неправильная (степень числителя больше степени знаменателя), поэтому выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l}
-\,t^8 & t^2+1 \\
\underline{t^8+t^6} & \overline{t^6-t^4+t^2-1} \\
\quad -\,-t^6 & \\
\quad \underline{-t^6-t^4} & \\
\qquad -\,t^4 & \\
\qquad \underline{t^4+t^2} & \\
\qquad\quad -\,-t^2 & \\
\qquad\quad \underline{-t^2-1} & \\
\qquad\qquad 1 \text{ – остаток} &
\end{array}$$

$$\frac{t^8}{1+t^2} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}.$$

$$J=6\int\frac{t^8}{1+t^2}dt=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\int t^6dt-6\int t^4dt+6\int t^2dt-6\int dt+$$

$$+6\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{6t^7}{7}-\frac{6t^5}{5}+\frac{6t^3}{3}-6t+6\operatorname{arctg}t+C.$$

Перейдем к аргументу x:

$$J=\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^7}{7}-\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^5}{5}+2\left(\sqrt{x+3}\right)-6\cdot\sqrt[6]{x+3}+6\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

Ответ: $\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^7}{7}-\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^5}{5}+2\left(\sqrt{x+3}\right)-6\cdot\sqrt[6]{x+3}+6\operatorname{arctg}(x+3)+C$.

В задаче 13(е) рассматриваются интегралы вида

$\int R(\sin x;\cos x)\,dx$, где $R(\sin x;\,\cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. С помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби нового аргумента t. При такой подстановке:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Замечание. Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ нередко приводит к сложным выкладкам, поэтому изучите частные подстановки (читайте предлагаемую литературу).

Задача 13(д). Найти неопределенный интеграл $J=\int\frac{dx}{3\sin x-5\cos x+4}$.

Решение. Используем универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда

$$J=\int\frac{dx}{4\sin x-5\cos x-1}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}-5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-1}=\int\frac{2dt}{8t-5+5t^2-1-t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4t^2+8t-6}=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+2t-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2t+2-\sqrt{2}}{2t+2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Перейдем к переменной x: $$J=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{2}}\right|+C$.

§2. Определенный интеграл

Приступая к изучению этой темы, необходимо усвоить определение и основные свойства определенного интеграла.

При вычислении определенного интеграла используют формулу Ньютона – Лейбница
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$
где $F(x)$ – любая первообразная функция $f(x)$.

Методы вычисления определенных интегралов:

1. Замена переменной осуществляется по формуле
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$
где $x=\varphi(x)$; $a=\varphi(\alpha)$; $b=\varphi(\beta)$.

Эта формула справедлива, если $f(x)$ – непрерывная функция, а подстановка $x=\varphi(x)$ сама непрерывна на отрезке $[\alpha;\ \beta]$. Подчеркнем, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной, в отличие от неопределенного интеграла, возврат к старой переменной не требуется.

2. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;\ b]$, то справедлива формула
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$
где символ $uv\Big|_a^b$ обозначает разность $u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

§3. Приложения определенного интеграла

В этой теме предусмотрено применение определенного интеграла для вычисления площадей различных фигур, объемов тел вращения, длин кривых, работы и силы давления.

3.1. Вычисление площади в прямоугольных координатах

а) Если непрерывная кривая задана уравнением $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a$, $x=b$

($a < b$) и осью Ox (рис. 22), вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

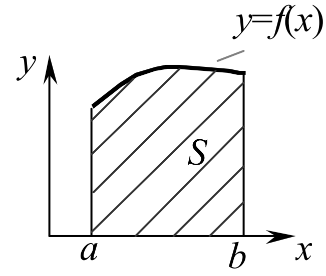

Рис. 22

б) Если криволинейная трапеция ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$), то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$ (рис. 23).

В отдельных случаях какая-либо граница $x = a$ и $x = b$ может выродиться в точку пересечения кривых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ (рис. 24).

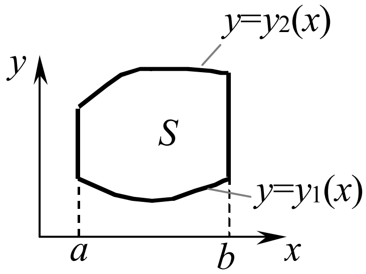

Рис. 23

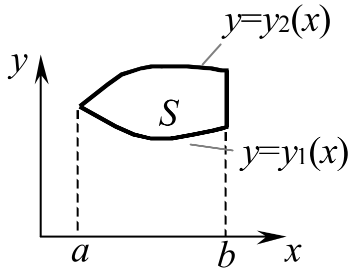

Рис. 24

3.2. Параметрически заданная кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и осью Ox, выражается интегралом $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где t_1, t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

3.3. Вычисление площади в полярных координатах

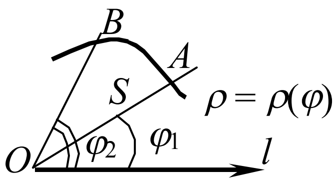

Рис. 25

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора OAB (рис. 25) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

3.4. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 22), вычисляется по формуле $V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 dx = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат и прямыми $y = c$, $y = d$ ($c < d$) (рис. 26), вычисляются по формуле $V_y = \pi \int\limits_c^d x^2 dy = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$.

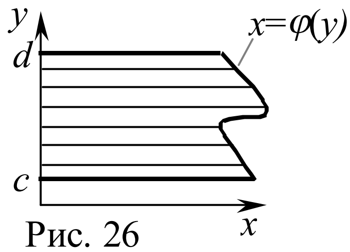

Рис. 26

Если $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула принимает вид

$$V_x = \pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

3.5. Длина плоских кривых

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$ и производная $y'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой выражается интегралом

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

где a и b – абсциссы концов дуги.

1. Если кривая задана уравнениями вида $x = g(y)$, то

$$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dy,$$

где c и d ($c < d$) – ординаты концов дуги.

2. Если кривая задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

где t_1, t_2 – значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

3. Если гладкая кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (см. рис. 25) в полярных координатах, то длина дуги l кривой выражается интегралом

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла φ в концах дуги ($\varphi_1 < \varphi_2$).

3.6. Физическое приложение

1) **Общая схема применения определенного интеграла**

Пусть требуется найти некоторую физическую величину Q, имеющую определенное значение на отрезке $[a, b]$. Предполагается, что Q является аддитивной величиной, т. е. если отрезок $[a, b]$ делится на части, то величина Q складывается из суммы значений Q, соответствующих этим частям. Из условия задачи находят «элемент» dQ величины Q, отвечающий «элементарному» промежутку $[x, x + dx]$ в виде $dQ = q(x)dx$. После этого, интегрируя по отрезку $[a, b]$, получают величину $Q = \int_a^b q(x)dx$.

2) **Путь, пройденный точкой**.

Пусть точка движется по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Определить путь, пройденный точкой от момента времени t_1 до момента t_2.

Решение. За элементарный промежуток времени $[t, t + dt]$ точка пройдет путь $dS = v(t)dt$, где dS – «элемент пути» и $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

3) **Работа силы**.

Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox от точки $x = a$ до точки $x = b$ $(a < b)$ под действием переменной силы $F = F(x)$, причем направление силы совпадает с направлением движения. Найти работу, произведенную силой при этом перемещении.

Решение. На элементарном перемещении $[x, x + dx]$ работа силы равна $dA = F(x)dx$. Мы получили «элементарную» работу dA, $A = \int_a^b F(x)dx$.

4) **Сила давления жидкости на пластину** выражается формулой

$$P = \rho g \int_{x_0}^{x_1} xy(x)dx,$$

где x_0 – глубина, на которой находится самая верхняя точка пластинки; x_1 – глубина, на которой находится самая нижняя ее точка; ρ - удельная плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; x – расстояние точек пластинки до уровня жидкости; $y(x)$ – длина горизонтального сечения пластинки (это неизвестная функция, зависящая от формы пластинки).

Задача 15(а). Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями

$$yx = 5, \quad y + x = 6.$$

Решение. Построим данную фигуру: $y = \dfrac{5}{x}$ - гипербола, $y = 6 - x$ – прямая (рис. 27).

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы, решив систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{5}{x}, \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow\ x_1 = 5,\ x_2 = 1.$

Искомая площадь равна:

$$S = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - 5\ln|x|\right)\Big|_1^5 = \left(6\cdot 5 - \frac{5^2}{2} - 5\ln 5\right) - \left(6\cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 5\ln 1\right) =$$

$= 12 - 5\ln 5.$

Ответ: S = 12 – 5ln5 ($ед^2$).

Задача 15(б). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\rho = \cos\varphi, \quad \rho = \sin\varphi.$$

Решение. Уравнения в полярных координатах $\rho = \cos\varphi$ и $\rho = \sin\varphi$ являются окружностями (рис. 28). Кривые, заданные в полярных координатах, можно строить по точкам с помощью ЭВМ. Основные кривые рассматриваются в предлагаемой литературе.

Очевидно, что $S_1 = S_2 \Rightarrow S = 2S_1$. Площадь криволинейного сектора можно найти по формуле $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

$$\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \rho = \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow\ \cos\varphi = \sin\varphi,\ \mathrm{tg}\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z.$$

Уравнение луча OA: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Ответ: $S = \dfrac{\pi - 2}{8}$.

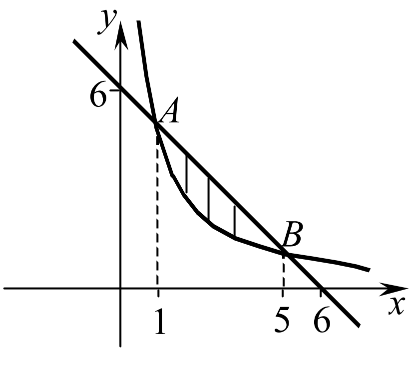

Рис. 27

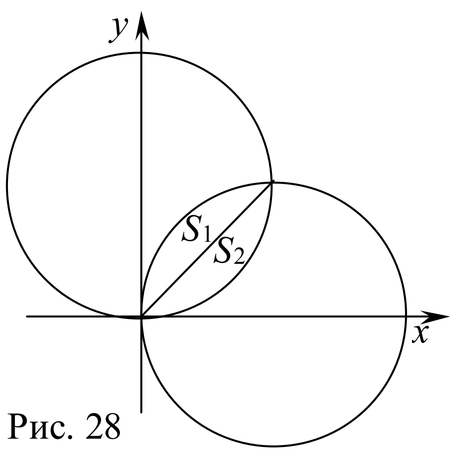

Рис. 28

Задача 15(в). Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $8x = y^2$.

Решение. Очевидно, что $V = V_1 - V_2$, где V_1 – объем тела, полученный вращением трапеции $OABC$, V_2 – объем тела, полученный вращением трапеции $ODBC$ (рис. 29).

Найдем ординаты точек пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 8x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \; y_1 = 0, y_2 = 4 .$$

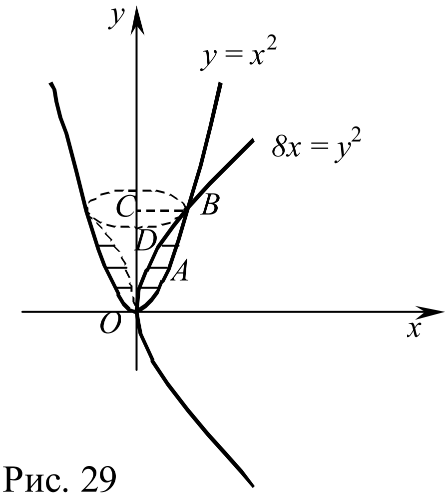

Рис. 29

Уравнение параболы $y = x^2$ (кривая OAB) запишем в виде $x = \sqrt{y}$, тогда

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi ,$$

$$V_2 = \pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{8} \right)^2 dy = \pi \int_0^4 \frac{y^4}{64} dy = \pi \left. \frac{y^5}{5 \cdot 64} \right|_0^4 = \pi \frac{16}{5}.$$

Следовательно, $V = 8\pi - \frac{16\pi}{5} = \frac{24\pi}{5}$.

Ответ: $4{,}8\pi$.

Задача 15(г). Вычислить объем тела, которое получается от вращения фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. Искомый объем представляет собой разность объемов, получаемых от вращения вокруг оси Ox (она же и полярная ось) фигуры $MNKLO$ и OKL (рис. 30).

Перейдем к параметрическому заданию кривой, приняв за параметр

полярный угол φ: $x = \rho \cos\varphi = a(1 + \cos\varphi) \cos\varphi$; $\quad y = \rho \sin\varphi = a(1 + \cos\varphi) \sin\varphi$.

Очевидно, что абсцисса точки M равна $2a$ (значение x при $\varphi = 0$). Абсцисса точки K есть значение минимума функции $x = a(1 + \cos\varphi) \cos\varphi$.

Найдем этот минимум: $\frac{dx}{d\varphi} = a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi)$, $a\sin\varphi(1 + 2\cos\varphi) = 0$,

$\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \arccos(-0{,}5) = 2\pi/3$. При $\varphi_1 = 0$, $x = 2a$, при $\varphi_2 = 2\pi/3$ получаем $x = -a/4$.

Координаты точки $L(-a/4, 0)$. Следовательно, искомый объем

$$V = \pi \int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y^2(x) dx - \pi \int_{-\frac{a}{4}}^{0} y^2(x) dx = \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 \sin^2\varphi \cdot (-a\sin\varphi)(1 + 2\cos\varphi) d\varphi -$$

$$- \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 \sin^2\varphi \cdot (-a\sin\varphi)(1 + 2\cos\varphi) d\varphi =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2 \sin^3\varphi (1+2\cos\varphi) d\varphi = \left| \begin{matrix} t = \cos\varphi, & \varphi = 0 \Rightarrow t = 1; \\ dt = -\sin\varphi d\varphi, & \varphi = \pi \Rightarrow t = -1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1-t)^2 (1+t)^3 (1+2t) dt = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi a^3$.

Задача 16. Найти силу давления, испытываемую пластиной с одной стороны в форме полукруга радиуса r, погруженного в жидкость так, что диаметр совпадает с поверхностью жидкости.

Решение. Вычислим силу давления, испытываемую «элементом» пластины $ABCD$ на глубине x ($0 \le x \le r$):

$$dP = \rho g x dS,$$

где dS – площадь элемента пластины $ABCD$ (рис. 31), $dS = AB \cdot dx$.

Из ΔAOK по теореме Пифагора находим:

$$AK = \sqrt{r^2 - x^2}, \; AB = 2AK = 2\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Тогда $dS = 2\sqrt{r^2 - x^2} dx$, $dP = 2\rho g x \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Вычислим силу давления на пластину:

$$P = \int^{r} 2\rho g x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\rho g \int^{r} \left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(r^2 - x^2\right) = -\frac{2\rho g}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\rho g r^3.$$

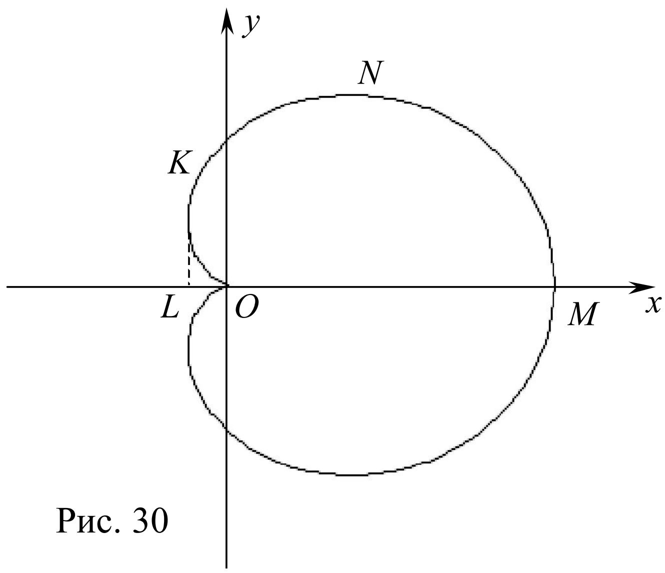

Рис. 30

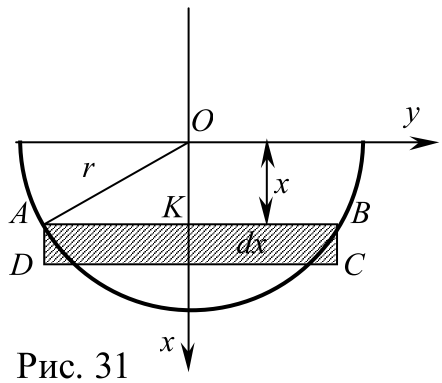

Рис. 31