

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная функции и неопределенный интеграл.

В прошлой главе мы ввели понятие производной и научились находить производные элементарных функций. Теперь мы научимся решать обратную задачу, а именно по известной производной $f'(x)$ от функции, найти саму функцию $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x) = f(x)$.

Примеры. Функция x^5 является первообразной для $5x^4$ на $(-\infty, +\infty)$, т.к. $(x^5)' = 5x^4$.
 $F(x) = \sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0, \infty)$, т.к. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ино-

гда требуется найти первообразную на определенном промежутке, поскольку функция может быть не определена на всей числовой оси.

Теорема 1. Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную. (Без доказательства)

Теорема 2. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на (a, b) , то $F(x) + C$ - также первообразная, где C - любое число.

Доказательство: Имеем $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. \triangleleft

Теорема 3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на (a, b) , то они на этом промежутке отличаются на постоянную (т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$).

Доказательство: По условию $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Составим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Очевидно, что $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$
 $\forall x \in (a, b) \Rightarrow \Phi(x) = C$ (согласно следствию из теоремы Лагранжа). \triangleleft

Из данных теорем вытекает что, если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на (a, b) , то любая другая первообразная имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$. Например, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразной является не только функция x^3 , но и $x^3 + 1$, $x^3 + 4$, $x^3 + 12$ и т.д.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом: $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция, dx - дифференциал независимой переменной, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Примеры: $\int e^x dx = e^x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$;

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x > 0$; $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, x < 0$.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1°. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d \int f(x)dx = f(x)dx$ или $dF(x) = f(x)dx$, где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$.

2°. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или}$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C .$$

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx + C , \text{ где } a = const .$$

4°. Неопределенный интеграл от суммы двух непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx .$$

5°. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C .$$

Данные свойства вытекают непосредственно из определения неопределенного интеграла.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить **таблицу основных неопределенных интегралов:**

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1 .$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ на интервале не содержащем } x = 0 .$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C .$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C, \int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C .$$

$$6. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$7. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C .$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C .$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C .$$

Методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование функций.

Непосредственным интегрированием называется способ вычисления неопределенных интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств 3°-5°.

Пример 1. $\int \left(4x^3 + \frac{2}{x^3} - 1\right) dx = 4 \int x^3 dx + 2 \int x^{-3} dx - \int dx = x^4 - \frac{1}{x^2} - x + C$

Пример 2. $\int 3^x e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln 3e^2} + C$

Интегрирование методом замены переменной (подстановки).

В основе метода лежит утверждение о независимости вида неопределенного интеграла от выбора аргумента, то есть если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $u = \varphi(x)$ также существует неопределенный интеграл, причем $\int f(u) du = F(u) + C$.

Доказательство: $dF(u) = d\left[\int f(u) du\right] = f(u) du$ (свойство 1°), таким образом $\frac{dF(u)}{du} = f(u)$, то есть $F'(u) = f(u)$ и $F(u)$ является первообразной функции $f(u)$.

Можно также записать $\frac{d}{dx}[F(\varphi(x))] = \frac{d}{dx}[F(u)] = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)u' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Таким образом получаем формулу интегрирования подстановкой:

$\int f(u) du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$, где $u = \varphi(x)$
--

Пример 1. $\int \sqrt{5 \sin x + 2} \cos x dx = \begin{cases} u = 5 \sin x + 2 \\ du = 5 \cos x dx \\ \cos x dx = \frac{1}{5} du \end{cases} = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{5} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$

Делаем обратную подстановку и таким образом

$\int \sqrt{5 \sin x + 2} \cos x dx = \frac{2}{15} (\sqrt{5 \sin x + 2})^3 + C$.

Пример 2. $\int x\sqrt{x+5} dx = \begin{cases} x+5 = t^2 \\ x = t^2 - 5 \\ dx = 2tdt \end{cases} = \int (t^2 - 5) \cdot t \cdot 2tdt = \int (2t^4 - 10t^2) dt =$
 $= 2 \frac{t^5}{5} - 10 \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5} (\sqrt{x+5})^5 - \frac{10}{3} (\sqrt{x+5})^3 + C$.

Во многих случаях бывает удобно вместо обозначения новой переменной интегрирования, ввести функцию под знак дифференциала: $f'(x) dx = df(x)$. При этом оказываются полезны следующие соотношения:

1. $dx = d(x+b)$	6. $e^{kx} = \frac{1}{k} de^{kx}$
2. $adx = d(ax+b)$	7. $\cos x dx = d \sin x$

3. $x dx = \frac{1}{2} dx^2$	8. $\sin x dx = -d \cos x$
4. $x^a dx = \frac{1}{a+1} dx^{a+1}$	9. $\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx$
5. $\frac{dx}{x} = d \ln x$	10. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -dctgx$

Пример 3. $\int \frac{x dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{(x^2)^2 + 1} = [x^2 = t] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctgt + C = \frac{1}{2} \arctgx^2 + C.$

Заметим, что для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем следующие соотношения:

$$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C;$$

$$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Применим первое из данных соотношений для вычисления интегралов от тригонометрических функций.

Пример 4. $\int tgx dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

Пример 5. $\int ctgx dx = \int \frac{\cos dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Данные интегралы не являются табличными, но их рекомендуется запомнить, так как они часто встречаются в задачах.

Интегрирование по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ функции аргумента x , имеющие производные u' и v' .
 $(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow \int (u'v + v'u) dx = uv + C \Rightarrow \int u'v dx + \int v'u dx = uv + C$

т.к. $u' dx = du$, $v' dx = dv$ то $\int v du + \int u dv = uv + C \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du + C$. Получаем формулу интегрирования по частям.

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях данную формулу необходимо применять несколько раз. Этот метод интегрирования рекомендуется использовать, когда имеется произведение алгебраического многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ на одну из следующих элементарных функций:

1. Тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$);
2. Трансцендентные функции (e^x , $\ln x$);
3. Обратные тригонометрические функции ($\arcsin x$, \arctgx и т.д.).

Возможна также комбинация произведения функций 1-й тип на 2-ой, 2ой на 3-ий ит.д.
 Например: $\int \sin x \ln x dx$, $\int \arctgx \ln x dx$.

Порядок применения формулы интегрирования по частям:

1. Выбор u и dv ;
2. Нахождение du и $\int dv = v$ (без учета постоянной C).
3. Применение формулы интегрирования по частям.

Поскольку под знаком интеграла стоит обычно произведение 2-х функций, то иногда бывает трудно сделать выбор u и v . В этом случае можно воспользоваться простым правилом.

Правило: а) В качестве функции u выбирается та из функций, которая при дифференцировании упрощается больше. Например: $(x+1)' = 1$, $(\sin x)' = \cos x$. Поэтому $u = x+1$. б) Если не действует п.а), то в качестве v выбирается та из функций, которую легче внести под знак дифференциала. Например: $\int \sin x \ln x dx$. $\sin x dx = -\cos x$, но $\ln x dx = ?$. Поэтому $dv = \sin x dx$.

$$\text{Пример 1. } \int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = u \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dx = dv \\ x = v \end{array} \right] = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Пример 2.

$$\int x \arctg x dx = \left[\begin{array}{l} x dx = dv \\ \arctg x = u \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \arctg x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \arctg x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} (x^2 \arctg x - x + \arctg x) + C.$$

Интеграл, приводящийся к самому себе.

Это частный случай применения формулы интегрирования по частям, когда в результате мы получаем выражение $I = uv - aI$, $a \neq -1$, а I - исходный интеграл. Тогда получаем, что $I = \frac{uv}{1+a}$.

$$\text{Пример 3. } I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = \ln x \end{array} \right] = \ln^2 x - \int \ln x \frac{1}{x} dx = \ln^2 x - I$$

$$2I = \ln^2 x; I = \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен в знаменателе.

К такому виду относятся интегралы:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$\text{II. } \int \frac{(mx + n)dx}{ax^2 + bx + c}; \int \frac{(mx + n)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Интегрирование выражений I – го типа производится путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующего применения формул табличных интегралов 8-11.

Напомним, если в интеграле квадратный трехчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, то для выделения полного квадрата a выносят за скобки $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ и затем применяют формулу для приведенного квадратного трехчлена

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} &= \left[x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] = \\ &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x - 25x^2}} &= \left[4x - 25x^2 = 25\left(\frac{4}{25}x - x^2\right) = 25\left(\frac{4}{625} - \left(x - \frac{2}{25}\right)^2\right) \right] = \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x - \frac{2}{25}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{25}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{25}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{5} \arcsin \frac{25x - 2}{2} + C \end{aligned}$$

Выражения II-го типа разбиваются на сумму двух интегралов, путем выделения в числителе производной от трехчлена, стоящего в знаменателе.

Так как $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, то $d(2ax + b) = d(ax^2 + bx + c)$ и можно записать

$$\begin{aligned} \int \frac{(mx + n)dx}{ax^2 + bx + c} &= A \cdot \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + B \cdot \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = A \cdot \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} + B \cdot \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \\ &= A \ln(ax^2 + bx + c) + \text{I тип интеграла. Аналогично можно представить} \end{aligned}$$

$$\int \frac{(mx + n)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = A \cdot \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + B \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = A \cdot 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + \text{II тип интеграла.}$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x - 2)dx}{x^2 + 4x + 13} &= \left[(x^2 + 4x + 13)' = 2x + 4 \right] = 3 \int \frac{(x - \frac{2}{3})}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{4}{3}}{x^2 + 4x + 13} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4 - 4 - \frac{4}{3}}{x^2 + 4x + 13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx - 8 \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 13| - 8 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C \end{aligned}$$

Интегрирование рациональных функций.

Рациональной функцией $R(x)$ называется дробь вида: $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ (1);

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - целые рациональные многочлены соответственно m -ой и n -ой степеней. $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$; $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$.

Если $m < n$, то $R(x)$ называется правильной дробью, если $m \geq n$ - неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби.

Пример 1. $\frac{x^4 + 4}{x^2 + 3x - 1} = x^2 - 3x + 10 + \frac{-33x + 14}{x^2 + 3x - 1}$

Таким образом, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Для того, чтобы рассмотреть метод интегрирования вспомним *некоторые свойства многочленов с действительными коэффициентами.*

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ - многочлен n-ой степени. Степенью многочлена называют максимальную степень при x . Корнем многочлена называют такое число, подстановка которого обращает многочлен в 0. Рассмотрим виды простейших многочленов.

- I. Линейный: $x - a$. Корень многочлена $x = a$, его нельзя разложить на множители.
- II. Квадратный трехчлен: $x^2 + px + q$. При наличии действительных корней x_1 и x_2 можно разложить на множители. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.
- III. Многочлены степени $n \geq 3$.

Теорема. Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше второй может быть представлен в виде произведения линейных и квадратных сомножителей в виде $P_n(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x^2 + px + q)^\gamma (x^2 + rx + s)^\rho \dots$ (2)

где a, b - корни многочлена кратностей соответственно α и β . (Если $\alpha=1$, то a - простой корень, при $\alpha>1$ - a - кратный корень). У квадратных трехчленов действительных корней нет.

Пример 2. $P_n(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 5)^3(x^2 - 8x + 25)(x^2 + 1)^4$

$x = -2$ - простой корень; $x = 1$ - корень кратности 2; $x = 5$ - корень кратности 3.

$x^2 - 8x + 25$ и $x^2 + 1$ - не имеют действительных корней.

Интегрирование рациональных дробей производится путем представления данных дробей в виде суммы простейших дробей.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

- 1.) $\frac{A}{x - a}$;
- 2.) $\frac{A}{(x - a)^k}$;
- 3.) $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)}$;
- 4.) $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$.

Интегралы от этих дробей находятся легко.

1.) $\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln|x - a| + C$,

2.) $\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = \frac{A}{(1 - k)(x - a)^{k-1}} + C$,

3.) Интеграл, содержащий квадратный трехчлен подробно рассмотрен в соответствующем разделе.

4.) Выделением производной от трехчлена и приведением к полному квадрату сво-

дится к виду $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$. Интегралы такого вида находят с помощью **рекур-**

рентной формулы понижения степени знаменателя:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right)$$

Данную формулу можно вывести с помощью интегрирования по частям.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь (1) со знаменателем представленном в виде (2), можно разложить в сумму простейших рациональных дробей типа 1.)-

4.). В данном разложении каждому корню a кратности α множителя $(x - a)^\alpha$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha}, \quad (3)$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности π множителя $(x^2 + px + q)^\pi$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\pi x + N_\pi}{(x^2 + px + q)^\pi}. \quad (4)$$

Для вычисления значений A, M, N в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого заключается в следующем. С учетом формул (3), (4) данную дробь $R(x)$ представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами A, M, N . Полученное равенство является тождеством. Поэтому, если привести все дроби к общему знаменателю $P_n(x)$ в числителе получим многочлен $Q_{n-1}^*(x)$ степени $n-1$, тождественно равный многочлену $Q_m(x)$, стоящему в числителе выражения (1). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в этих многочленах, получим систему n уравнений для определения n неизвестных коэффициентов A, M, N (с индексами).

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $Q_{n-1}^*(x)$ тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях x . Придавая x конкретные числовые значения получаем систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется **методом частных значений**. Если значения x совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

Данные методы рассмотрим на примерах.

Пример 3. Найти $\int \frac{2x - 3}{x(x - 1)(x - 2)} dx$

В соответствии с формулой (3) разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x - 3}{x(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2} = \frac{A(x - 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + C(x - 1)x}{x(x - 1)(x - 2)} \quad (5)$$

Числители подынтегральных функций в левой и правой частях формулы (5) будут тождественно равными, таким образом приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получаем систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A + B + C \\ x^1 | 2 = -3A - 2B - C \\ x^0 | -3 = 2A \end{array} \right\}$$

решение которой: $A = -3/2, B = 1, C = 1/2$.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в числитель (5) вместо x частные значения, равные корням знаменателя $x=0, x=1, x=2$. Получим равенства $-3=2A, -1=-B, 1=2C$. Получим те же значения коэффициентов. Теперь можно использовать это разложение для нахождения интеграла.

$$\int \frac{2x - 3}{x(x - 1)(x - 2)} dx = \int \left(\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1/2}{x - 2} \right) dx = -\frac{3}{2} \ln|x| + \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 2| + C$$

Пример 4. Найти $\int \frac{xdx}{(x - 1)(x + 1)^2}$.

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} \right) dx$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем $x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1)$. При $x=1$ и $x=-1$ находим, что $4A=1$, $-1=-2B$, то есть $A=1/4$ и $B=1/2$. Для нахождения C приравняем коэффициенты при x^2 . Получим $0=A+C$, то есть $C=-1/4$. Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int \frac{1/4}{x-1} dx + \int \frac{1/2}{(x+1)^2} dx + \int \frac{-1/4}{x+1} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$.

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} dx \text{ следовательно}$$

$x \equiv A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)$. При $x=1$ получим $1=2A$, то есть. Далее

$$\left. \begin{array}{l} x^2 | 0 = A + M \\ x^0 | 0 = A - N \end{array} \right\} \text{ Откуда } M = -1/2, N = 1/2.$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2x+1/2}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

I. При нахождении интегралов вида $\int \cos^m x \sin^n x dx$ ($m, n \in Z$) возможны следующие случаи:

1.) Одно из чисел m или n – нечетное. Тогда производится «отщепление» одной из нечетных степеней с последующим внесением под знак дифференциала.

2.) Оба числа m и n – четные. Тогда рекомендуется использовать тригонометрические формулы понижения степени.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Пример 1. $\int \sin^7 x \cos^3 x dx = \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$

$$\int (\sin^6 x - \sin^8 x) d(\sin x) = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

«Отщепление» степени лучше производить там, где показатель меньше.

Пример 2. $\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$

В ряде случаев полезны следующие рекуррентные соотношения, позволяющие понизить показатель степени.

$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$
$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$
$I_n = \int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

II. Интегралы вида $\int \sin mx \sin nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \cos nxdx$ вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Пример 3. $\int \sin 5x \cos 3xdx = \int \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 8x] dx = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$

III. Интегралы вида $\int tg^n x dx$ и $\int ctg^n x dx$ вычисляются путем «отщепления» четной степени и использования тригонометрических формул $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$. После упрощения подынтегрального выражения пользуются методом внесения функции под знак дифференциала или вышеприведенными рекуррентными соотношениями.

Пример 4. $\int tg^5 x dx = \int tg^4 x tg x dx = \int (tg^2 x)^2 tg x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)^2 tg x dx =$
 $\int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 1 \right) \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \left(\frac{1}{\cos^5 x} - \frac{2}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} \right) d(\cos x) = \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} -$
 $-\ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

IV. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg \frac{x}{2} = u$. В этом случае

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Пример 5. $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx = \int \frac{2du/(1+u^2)}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C =$
 $= \ln \left| 1 + tg \frac{x}{2} \right| + C$

В случае, когда имеет место тождество $R(-\cos x, -\sin x) \equiv R(\cos x, \sin x)$, для приведения поинтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощенную подстановку $tg x = u$. При этом

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Пример 6.
$$\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x} = \int \frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)} = \int \frac{du}{3+4u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} + C$$

Интегрирование иррациональных функций.

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

I. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[m]{x^\alpha}, \sqrt[n]{x^\beta}) dx$ сводятся к рациональной функции подстановкой $x = t^N$, где N – наименьшее общее кратное (НОК) m и n .

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 4}}$.

Так как $\text{НОК}(2, 4)=4$, то соответствующая подстановка $x = t^4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 4}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^3 + 4} = 4 \int \left(t^2 - \frac{4t^2}{t^3 + 4} \right) dt = \frac{4}{3} t^3 - \frac{16}{4} \ln|t^3 + 4| + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 4 \ln|\sqrt[4]{x^3} + 4| + C \end{aligned}$$

II. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha}, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta}) dx$, где R – рациональная функция, a, b, c, d – постоянные, приводится к интегралу от рациональной функции нового аргумента с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, где N – наименьшее общее кратное m и n .

Пример 2. Найти $\int \frac{\sqrt[6]{x+1} dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$. $\text{НОК}(2, 3, 6)=6$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x+1} dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} &= \left[\begin{array}{l} x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^4}{t+1} dt = 6 \int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2} t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 6t + 6 \ln|t+1| + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6 \ln|\sqrt[6]{x+1} + 1| + C \end{aligned}$$

III. Иррациональные функции вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ выделением полного квадрата сводятся к 3-м видам функций, для каждой из которой применяется свой вид подстановки:

- 1). $R(u, \sqrt{a^2 - u^2})$, подстановка $u = a \sin t$;
- 2). $R(u, \sqrt{a^2 + u^2})$, подстановка $u = at \operatorname{tg} t$;
- 3). $R(u, \sqrt{u^2 - a^2})$, подстановка $u = \frac{a}{\operatorname{cost}}$.

Пример 3.
$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \sqrt{4 - u^2} du$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 2 \sin t \\ du = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2t + \sin 2t + C = \left[t = \arcsin \frac{u}{2} = \arcsin \frac{x+1}{2} \right] = 2 \cdot \arcsin \frac{x+1}{2} + \sin \left(2 \cdot \arcsin \frac{x+1}{2} \right) + C \quad \Pi$$

пример 4. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \int \frac{dt / \cos^2 t}{(t g^2 t + 1) \left(t g t + \sqrt{t g^2 t + 1} \right)} =$

$$= \int \frac{dt / \cos^2 t}{(1 / \cos^2 t) (\sin t / \cos t + \sqrt{1 / \cos^2 t})} = \int \frac{dt}{(\sin t + 1) / \cos t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t + 1} = \ln |\sin t + 1| + C$$

Для того чтобы перейти от новой переменной t к переменной x , воспользуемся формулами тригонометрии. Так как $x = \operatorname{tg} t$, то $1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Поэтому

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1 + x^2}; \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1 + x^2}; \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \text{Окончательный}$$

ответ: $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + 1 \right| + C.$

Примечание. В интегралах, содержащих выражение $\sqrt{x^2 + a}$ можно применять подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2 + a} = t - x$.

Теорема Коши. Понятие о «неберущихся» интегралах.

При вычислении неопределенных интегралов возникает вопрос 1) всякая ли непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную, 2) каким образом найти неопределенный интеграл, если он существует. На первый вопрос отвечает теорема Коши.

Теорема Коши. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Или другая формулировка.

Для каждой непрерывной в интервале (a, b) функции $f(x)$ существует функция $F(x)$, производная от которой в интервале (a, b) в точности равна данной функции $f(x)$. $F'(x) = f(x)$.

Однако теорема Коши не утверждает, то первообразную данной функции можно отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях. Основные способы вычисления интегралов в элементарных функциях мы рассмотрели ранее. Под «неберущимися» интегралами подразумевают интегралы, которые не могут быть выражены через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Например, доказано, что следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях:

$$\int e^{-x^2} dx - \text{интеграл Пуассона,}$$

$$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx - \text{интегралы Френеля,}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \text{интегральный логарифм,}$$

©Лекция подготовлена доц. Мусиной М.В.

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус.

Указанные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Имеются другие способы для их вычисления. Например, с помощью разложения в бесконечный степенной ряд. Эти способы будут рассмотрены в одной из следующих глав.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенный интеграл.

Определение 1. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ (разбиение R). На любом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ($[x_i, x_{i+1}]$ - частичный отрезок) выберем по произвольной точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. (Рис 1.) $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ - длина отрезка. Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ - n -ная интегральная сумма (Римана) функции f на отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл суммы S_n - это есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, в основании которых лежат отрезки Δx_i , а высоты равны $f(\xi_i)$. (В том случае если функция неотрицательна.)

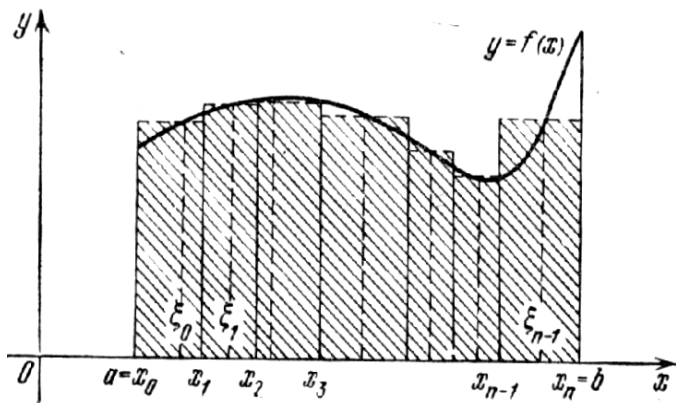


Рис. 1.

Обозначим через $\lambda_R = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$ - максимальную длину отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения R . Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма S_n , когда $\lambda_R \rightarrow 0$, называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается как

$$\lim_{\lambda_R \rightarrow 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

a , b - нижний и верхний пределы интегрирования, $[a, b]$ - отрезок интегрирования.

Предел (1) называют интегралом Римана и функцию, для которой этот предел существует называют интегрируемой в смысле Римана.

Данное определение эквивалентно следующему.

Определение 1'. *Определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется число I , удовлетворяющее следующему свойству: для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R отрезка $[a, b]$, у которого $\lambda_R = \max_i \Delta x_i < \delta$, выполняется неравенство*

$$|S_n - I| = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

при произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

В случае непрерывных функций понятие определенного интеграла введено Коши. Говорят, что непрерывная на $[a, b]$ функция интегрируема в смысле Коши.

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (1) связано с рядом трудностей, так как интегральные суммы имеют сложный вид, и найти их предел нелегко. До XVII века вычисление интегралов являлось трудной математической задачей. Ньютон и Лейбниц указали общий метод решения таких задач путем сведения к отысканию первообразной функции.

Вычисление определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) - \text{ есть первообразная от функции } f(x)$$

Доказательство:

▷ Пусть R произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ отрезка $[a, b]$. Запишем $F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_2) - F(x_1)] +$

$+ [F(x_1) - F(x_0)] = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = (*)$. Согласно теореме Лагранжа о среднем

$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Тогда продолжим запись

$$(*) = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow{\lambda_R \rightarrow 0} \int_a^b f(x)dx. \triangleleft$$

Ограниченность интегрируемых функций.

Теорема. Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем. (без доказательства).

Основные свойства определенного интеграла.

$$1). \int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b dx = b - a.$$

$$2). \int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx.$$

$$3). \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

$$4). \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

5). Если функция f интегрируема на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ ($a < c < b$), то она интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Интеграл как функция верхнего предела.

Замечание. Обозначение переменной интегрирования в определенном интеграле никакой роли не играет, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция $f(x)$. Зададим произвольное число $x \in [a, b]$. Теперь определенный интеграл $F(x) = \int_a^x f(u)du$ есть некоторая функция от x .

Теорема 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)$ непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$.

Теорема 2. Если интегрируемая на $[a, b]$ функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то в этой точке существует производная от F .

$$F'(x) = f(x) \text{ или } \left[\int_a^x f(x) dx \right]' = f(x).$$

На основе вышеприведенного определения приведем еще одно доказательство формулы Ньютона-Лейбница.

$$\triangleright \text{ Так как } F(x) = \int_a^x f(u) du, \text{ то } F(a) = \int_a^a f(u) du = 0 \text{ и } F(b) = \int_a^b f(u) du.$$

Согласно теореме 2 $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Если $\Phi(x)$ любая другая первообразная $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$. То есть

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u) du. \triangleleft$$

Приведем примеры простейших случаев применения формулы Ньютона-Лейбница.

$$\text{Пример 1. } \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Пример 2. } \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = (-\cos \pi - (-\cos 0)) = (1 - (-1)) = 2$$

Теорема. (о замене переменной). Имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ где } \varphi(t) \text{ - непрерывно дифференцируема на } [c, d],$$

$a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

$$\text{Пример 3. } \int_0^{4\pi} \sin^3 t dt = -\int_0^{4\pi} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = [x = \cos t] = -\int_1^{-1} (1 - x^2) dx = 0$$

Верхний и нижний пределы в интеграле с новой переменной получены из условия $\cos 0 = 1$ и $\cos 4\pi = 1$.

Теорема. Справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$, где u, v - непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции.

$$\text{Пример 4. } \int_0^\pi x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx =$$

$$= 0 - \cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

Теорема о среднем.

Теорема. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента, то есть $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$, $c \in [a, b]$.

Доказательство: \triangleright На основании формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях функции $F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$, так как $F'(c) = f(c)$

Геометрический смысл формулы. При $f(x) \geq 0$ формула показывает, что криволинейная трапеция $oABb$ (рис.2) имеет площадь равную некоторому прямоугольнику $oPQb$. Высота $f(c)$ этого прямоугольника носит название среднего значения функции $f(x)$ на промежутке

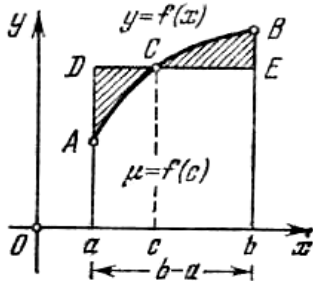


Рис. 2.

$[a, b]$. То есть $\mu = f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Следствие. Если $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, то $m \leq f(x) \leq M$ и при $a < b$ из теоремы о среднем следует

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a).$$

(Данное свойство позволяет оценить величину определенного интеграла.)

Теорема. При $b > a$, интеграл от неотрицательной функции, есть число неотрицательное.

▷ Так как $f(x) \geq 0$ и $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow$ (по теореме о среднем) интеграл от неотрицательной функции есть число неотрицательное. ◁

Теорема. Неравенство между непрерывными функциями можно интегрировать почленно при условии, что верхний предел больше верхнего. То есть если $b > a$ и

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство: ▷ $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Так как в последнем интеграле подынтегральная функция $f(x) - g(x) > 0$ то

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx > 0 \quad \triangleleft$$

Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции (рис. 3.), ограниченной дугой графика функции $y = f(x)$, отрезком $a \leq x \leq b$ оси Ox и двумя вертикалями $x = a$; $x = b$.

На основании геометрического смысла интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

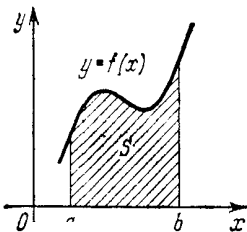


Рис. 3.

Пример 1. Вычислить площадь одной волны синусоиды

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$). (Рис 4.)

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

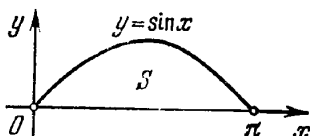


Рис. 4.

Задача 2. Найти ограниченную графиками $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$. (рис 5)

Искомую площадь S можно рассматривать как разницу площадей криволинейных трапеций.

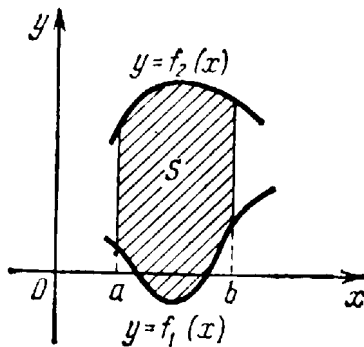


Рис. 5.

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$. Находим точки пересечения данных кривых и строим искомую фигуру (рис. 6):

$$\left. \begin{matrix} y = 3x - x^2 \\ y = -x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = 3x - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Следовательно

$$S = \int_0^4 (3x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

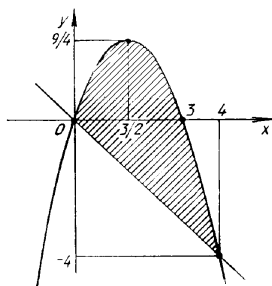


Рис. 6.

Замечание. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию (рис 4), задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции $S = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt$, где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{сом } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Запишем параметрическое уравнение эллипса: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. С учетом симметрии фигуры получаем $S = 4 \int_0^{\pi/2} y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 a \sin t (-b \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt =$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Площадь в полярных координатах.

Задача. Найти площадь S сектора ОАВ, ограниченной данной линией $\rho = f(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (Рис. 7.) где ρ и φ - полярные координаты.

Для решения задачи разобьем сектор ОАВ на секторы лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$. Элемент n -ного

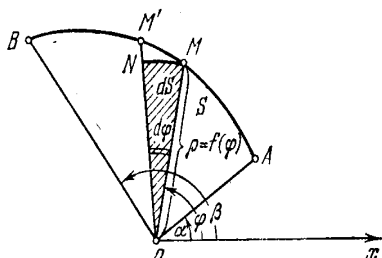


Рис. 7.

сектора можно приближенно считать круговым сектором, ограниченным окружностью радиуса $\rho_i = f(\varphi_i)$. Площадь такого сектора $\Delta S_i = \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \varphi_i$. Чтобы получить общую площадь суммируем площади всех полученных секторов.

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \Delta \varphi_i \xrightarrow{\Delta \varphi_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

Таким образом, получаем формулу для вычисления площади в полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$$

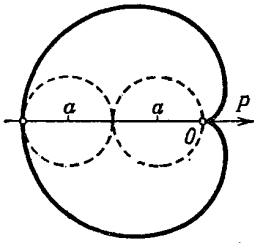


Рис. 8.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (Рис. 8)

Учитывая симметрию фигуры можно записать

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (a(1 - \cos \varphi))^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \left(\varphi - 2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos \varphi}{2} d\varphi \right) = a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \pi$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей $r = 2a \sin \varphi$ и $r = 2a \cos \varphi$.

Окружности пересекаются при $\varphi = \frac{\pi}{4}$; рассматриваемая

фигура (Рис. 9) симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, следовательно, ее площадь можно вычислить так:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 4a^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2a^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot a^2$$

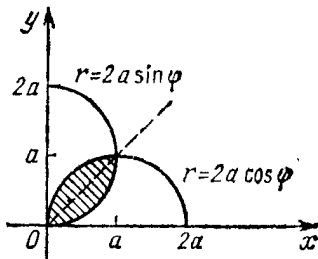


Рис. 9.

Вычисление объемов тел вращения.

Пусть Γ есть кривая $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Вычислим объем тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$ и $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг OX . (Рис. 10)

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Считаем, что элемент объема ΔV тела ограниченного плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ приближенно равен объему цилиндра

высоты $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, радиуса $y_i = f(x_i)$. То есть $\Delta V_i \cong \pi y_i^2 \Delta x_i = \pi f^2(x_i) \Delta x_i$.

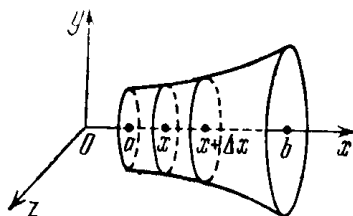


Рис. 10.

Величина $V_n = \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) \Delta x_i$ приближенно выражает V и переходя к пределу имеем

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Мы получили формулу объема тела вращения.

Аналогично можно получить формулу объема тела вращения вокруг оси OY .

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Пример 5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры,

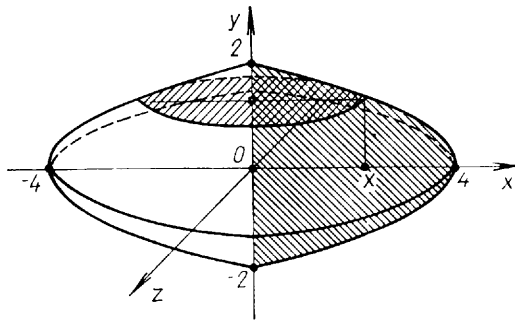


Рис. 11.

лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

Очевидно (Рис. 11), что

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_{-2}^2 (4 - y^2)^2 dy = 2\pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 dy = \\ &= 2\pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy = 2\pi \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{512}{15} \pi \approx 107,23 \end{aligned}$$

Длина дуги кривой.

Определение. Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломанной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Кривая называется гладкой, если она непрерывна и в каждой точке имеет касательную непрерывно меняющую свое положение от точки к точке.

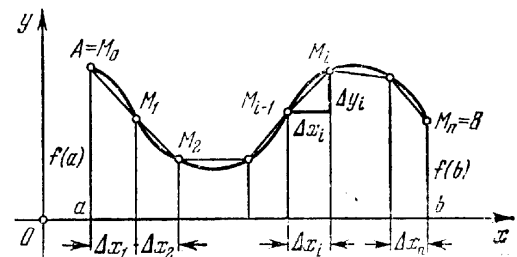


Рис. 12.

Рассмотрим вопрос о длине дуги l кривой, заданной $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Впишем в данную гладкую кривую ломаную линию $A = M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1} M_n = B$. (Рис. 12)

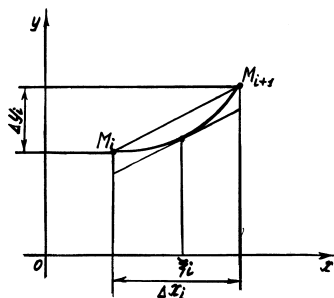


Рис. 13.

Проектируя точки M_i на Ox получим разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Рассмотрим i -тое звено ломаной $[M_i, M_{i+1}]$. (Рис. 13) Δy_i -приращение функции $f(x)$ на Δx_i .

$$\Delta l_i = M_i M_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Согласно теореме Лагранжа $\Delta y_i = \Delta x_i \cdot f'(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Тогда $\Delta l_i = M_i M_{i+1} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$, а длину всей ломаной можно получить суммируя все ее звенья.

$l = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$. Перейдем к пределу, считая, что наибольшее звено стремится к нулю.

$$l = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пример 6. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между точками с абсциссами $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

$$\text{Согласно формуле имеем } l = \int_3^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_3^8 \sqrt{1+x} dx = \left. \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} \right|_3^8 = \frac{38}{3}.$$

Случай параметрически заданной кривой.

Если линия задана в параметрическом виде, то есть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t_1 \leq t \leq t_2$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$ функции.

При стремлении длины отрезка ломаной к нулю можно считать, что $\Delta l_i \rightarrow dl$, то есть дифференциалу дуги. Тогда также $\Delta x_i \rightarrow dx$, $\Delta y_i \rightarrow dy$ соответствующие дифференциалы. Тогда можно записать $\Delta l_i = M_i M_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \rightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Это формула для вычисления дифференциала дуги. Тогда $l = \int dl$.

Так как $dx = \varphi'(t)dt$ и $dy = \psi'(t)dt$, то

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t)dt)^2 + (\psi'(t)dt)^2} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \text{ и}$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Пример 7. Найти длину дуги астроида $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

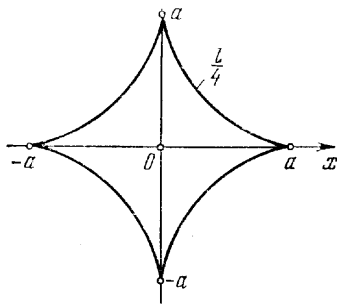


Рис. 14.

(Рис. 14.)

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) =$$

$$= 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2} \quad l = 6a$$

Длина дуги в полярных координатах.

Выведем сначала дифференциал dl дуги в полярных координатах. Из предыдущего раздела известно, что $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, где x и y — прямоугольные декартовы координаты точки дуги.

Как известно, формулы перехода от полярных координат ρ и φ к прямоугольным x и y следующие: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда

$$dx = x'(\varphi)d\varphi = (\rho'_\varphi \cos \varphi - \rho \sin \varphi)d\varphi$$

$$dy = y'(\varphi)d\varphi = (\rho'_\varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi)d\varphi .$$

Возведя в квадрат и складывая, получим

$$(dl)^2 = (\rho'^2 \cos^2 \varphi - 2\rho'\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho'^2 \sin^2 \varphi + 2\rho'\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi)(d\varphi)^2 = (\rho'^2 + \rho^2)(d\varphi)^2$$

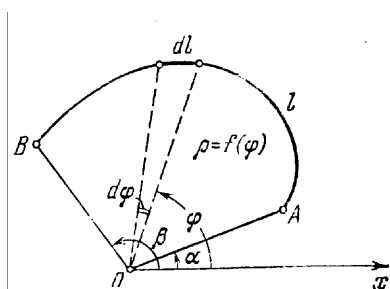


Рис. 15.

$$\text{Следовательно, } dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi . (1)$$

Для того чтобы найти длину дуги непрерывно дифференцируемой кривой

$\rho = \rho(\varphi)$ между точками А и В (Рис. 15) необходимо проинтегрировать равенство (1) в пределах от $\rho = \alpha$ до $\rho = \beta$.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$$

Пример 8. Вычислить полную длину дуги кардиоиды (Рис. 8.) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$.

$$\rho' = a \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = a \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -4a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a$$

$$l = 8a$$

Физические и механические приложения определенного интеграла.

Одно из основных применений определенного интеграла – для вычисления работы переменной силы.

Задача. Найти работу А непрерывной переменной силы $F(x)$, приложенной к материальной точке М, при перемещении последней вдоль оси Ox из положения $x = a$ в положение $x = b$, предполагая, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

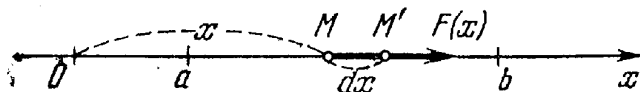


Рис. 16

Пусть точка М переместилась из положения x в положение $x + dx$ (Рис. 16.). На бесконечно малом промежутке $[x, x + dx]$ длины dx силу $F(x)$ приближенно можно считать постоянной. Поэтому элементарная работа силы равна

$$dA = F(x)dx$$

Интегрируя данное выражение в пределах от $x=a$ до $x=b$, получим всю работу

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

Кроме того, определенный интеграл применяется для вычисления некоторых механических величин, таких как: статистические моменты, моменты инерции и координаты центра масс.

Несобственный интеграл.

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что 1) промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен и 2) подынтегральная функция $f(x)$ - определена и непрерывна на $[a, b]$. Иногда от одного (или обоих) этих предположений можно отказаться в этом случае интеграл имеет название несобственный интеграл.

I. Интеграл по бесконечному промежутку.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на полуинтервале $a \leq x < +\infty$. Тогда для любого $x < B$ существует интеграл $\int_a^B f(x)dx$. Если существует предел

$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx$, то этот предел называют *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования* функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty]$ и записывают в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx.$$

При этом говорят, что интеграл сходится. В противном случае (предел не существует или равен ∞) говорят, что он расходится или не существует как несобственный интеграл.

Примеры.

1. $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \cos x dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \sin B$ -Предела нет. Несобственный интеграл не

существует.

2. $\int_0^{+\infty} 2x dx = x^2 \Big|_0^{+\infty} = +\infty$ - Несобственный интеграл расходится.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{B} + 1\right) = 1$ Интеграл сходится.

Утверждение: Если $f(x) > 0$, то интеграл $\int_a^B f(x)dx$ возрастает вместе с B.

Доказательство: Пусть $B' > B$, так как $\int_B^{B'} f(x)dx > 0$ (интеграл от положительной

функции), то $\int_a^{B'} f(x)dx = \int_a^B f(x)dx + \int_B^{B'} f(x)dx > \int_a^B f(x)dx$

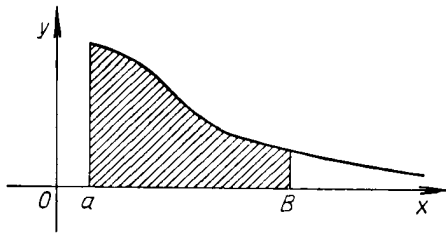


Рис. 17.

Известно, что всякая возрастающая переменная имеет предел (конечный или бесконечный), то есть при $f(x) > 0$ интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ имеет (конечное или бесконечное числовое значение). Геометрически – это площадь фигуры, ограниченной слева прямой $x = a$, снизу осью Ox , сверху графиком $y = f(x)$ и неограниченно простирающейся направо. (Рис. 17.)

Пусть $F(x)$ первообразная для $f(x)$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} [F(B) - F(a)].$$

Если ввести обозначение $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$, то приходим к обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

Мы подробно рассмотрели вычисление интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Аналогично можно определить интегралы с бесконечным нижним пределом и с обоими бесконечными пределами:

ределить интегралы с бесконечным нижним пределом и с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x)dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_c^B f(x)dx, \text{ где } -\infty < c < +\infty.$$

Пример 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_A^0 +$
 $+ \lim_{B \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^B = \lim_{A \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg A) + \lim_{B \rightarrow +\infty} (\arctg B - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

II. Интегралы от неограниченных функций.

Допустим, что отрезок $[a, b]$ - конечен, но функция $f(x)$ не ограничена на нем, а стремится к бесконечности при приближении к одной из особых точек c_1, c_2, \dots, c_n .

Рассмотрим сначала одну особую точку $x = b$. Во всех остальных точках функция $f(x)$ непрерывна. Пусть точка β такова, что $a < \beta < b$, тогда на отрезке $[a, \beta]$ определен интеграл $\int_a^\beta f(x)dx$. Если существует предел $\lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x)dx$, то несобственный интеграл от разрывной функции существует (сходится). В противном случае интеграл расходится.

Аналогичным образом можно рассмотреть интеграл с особой точкой $x = a$.

Примеры.

$$5. \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln|x| \Big|_{\alpha}^1 = +\infty. \text{ Интеграл расходится.}$$

$$6. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = 2. \text{ Интеграл сходится.}$$

Если обе точки a и b - особые, то интеграл определяется как сумма

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b.$$

Несобственный интеграл с особенностями в нескольких точках.

Пусть $f(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$ кроме точек $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, лежащих между a и b . (То есть $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow c_i$.) Тогда под интегралом от a до b понимается сумма

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx.$$

Если не учитывать неограниченность функции на отрезке интегрирования можно получить ошибочное значение интеграла.

Пример. Применим формулу Ньютона-Лейбница для интеграла $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$. Полученный результат неверен, поскольку подынтегральная функция положительна.

Ошибка получена, так как не учтено, что на отрезке интегрирования $[-1, 1]$ существует особая точка $x = 0$, в которой функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ неограниченна. Необходимо вычислить данный интеграл как несобственный, а именно:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{-1}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{\beta} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\alpha}^1 = +\infty$$

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Часть интегралов, как уже было сказано, не имеют первообразных в элементарных функциях, поэтому для их нахождения применяют приближенные вычисления.

I. Формула трапеций.

Чтобы приближенно вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$ воспользуемся его геометрическим смыслом. Как известно такой интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции ограниченной линией $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 18).

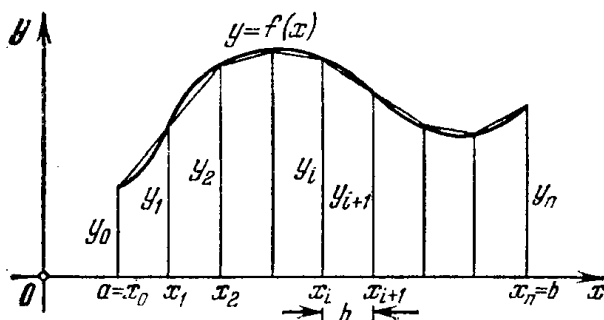


Рис. 18.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. (h - шаг разбиения.) x_1, x_2, \dots, x_n - абсциссы точек деления и y_1, y_2, \dots, y_n - соответствующие ординаты кривой. Имеем расчетные

формулы: $y_i = f(x_i)$, где $x_i = x_0 + ih$. ($i = 0, 1, \dots, n$). В результате построения наша криволинейная трапеция разбилась на ряд вертикальных полосок одной и той же ширины h , каждую из которых приближенно можно принять за трапецию. Суммируя площади этих трапеций, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \text{ (Формула трапеций.)}$$

Пример 1. Вычислить приближенно $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = I$.

Разобьем промежуток интегрирования на 10 частей ($n = 10$), следовательно $h = 0,1$.

Абсциссы точек деления x_i и соответствующие им ординаты $y_i = \sqrt{1+x_i^2}$, запишем

в таблице. Причем для удобства в начальной и конечной точке умножим значение на $\frac{1}{2}$

i	x_i	y_i
0	0,0	0,5000*
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	0,7071*

Находим $\sum_{i=0}^{10} y_i = 11,4838$. И по формуле трапеций имеем $I \approx 1,148$. Точное значение

этого же интеграла, полученное по формуле Ньютона-Лейбница

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1,1479.$$

II Формула Симпсона

Более точную формулу можно получить, если профиль криволинейной полоски считать параболой, а не прямой линией как в формуле трапеций. В этом случае можно получить формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \{ f(a) + 2[f(a+2h) + \dots + f(a+(n-2)h)] + 4[f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)] + f(b) \}, h = \frac{b-a}{n}.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = I$.

Промежуток интегрирования разбиваем на 10 частей ($n = 10$), $h = 0,1$.

©Лекция подготовлена доц. Мусиной М.В.

В таблицу запишем абсциссы точек деления x_i и соответствующие им ординаты

$$y_i = \frac{1}{1+x_i^2}.$$

i	x_i	y_i
0	0,0	1,00000
1	0,1	0,99010
2	0,2	0,96153
3	0,3	0,91743
4	0,4	0,86206
5	0,5	0,80000
6	0,6	0,73529
7	0,7	0,67114
8	0,8	0,60975
9	0,9	0,55249
10	1,0	0,50000

Отдельно суммируем значения y_i , стоящие на четных местах

$$\sum(\text{четн}) = 0,96153 + 0,86206 + 0,73529 + 0,60975 = 3,16863 \text{ и на нечетных местах}$$

$$\sum(\text{нечетн}) = 0,9901 + 0,9173 + 0,8 + 0,67114 + 0,55249 = 3,93116$$

$$I \approx \frac{1}{30} [1,0 + 2 \cdot 3,16863 + 4 \cdot 3,93116 + 0,5] = 0,78537$$

Точное значение интеграла $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \approx 0,7853$.