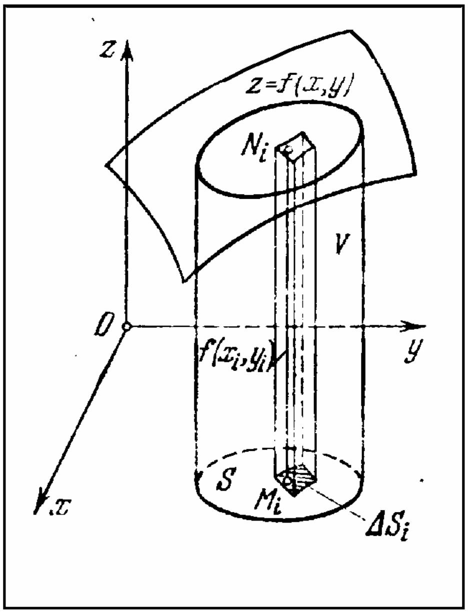
Кратные интегралы.

Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла.

В теории определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции было введено понятие интегральной суммы, пределом которой является определенный интеграл. На основе задачи об определении объема тела мы придем к понятию двумерной интегральной суммы, предел которой называется *двойным интегралом.*

Задача. Найти объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$), снизу конечной замкнутой областью *S* плоскости *Oxy* и с боков прямой цилиндрической поверхностью, построенной на границе области *S* и имеющей образующие, перпендикулярные плоскости *Oxy* (рис. 1).



Тело указанного вида для краткости называется *цилиндроидом.* В частном случае, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию его, то цилиндроид называется *цилиндром.* Примером цилиндра служит круговой цилиндр, рассматриваемый в средней школе. Обобщая рассуждение, обычно применяемое для нахождения объема кругового цилиндра, нетрудно доказать, что объем *V* цилиндра с площадью основания *S* и высотой *H* равен *V = SH.*

Для вычисления объема *V* данного цилиндроида разобьем основание его *S* на конечное число элементарных ячеек $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots \Delta S_n$; (вообще говоря, криволинейных). В каждой из этих ячеек; ΔS_i выберем точку $M_i \in \Delta S_i$, $M_i(x_i, y_i)$и, построив прямой цилиндрический столбик с основанием ΔS_i и высотой $M_i N_i = f(x_i, y_i)$, равной аппликате поверхности в выбранной точке. Объем такого столбика на основании формулы объема цилиндра очевидно, равен

$$V_i = f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

где ΔS_i - площадь, соответствующей ячейки. Сумма объемов этих цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное криволинейное тело, причем аппроксимация является, вообще говоря, тем более точной, чем меньше диаметры ячеек ΔS_i. Поэтому объем нашего цилиндроида приближенно выразится суммой

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \quad (1)$$

Формула (1) дает возможность найти объем *V* с любой степенью точности, если число ячеек ΔS_i достаточно велико и линейные размеры их весьма малы. Обозначим через d_i *диаметр* ячейки ΔS_i, т. е. наибольший линейный размер ее. Точнее говоря, под диаметром *d* ограниченной замкнутой (т. е. с присоединенной границей) фигуры Ф (дуги, площадки и т. п.) понимается длина наибольшей ее хорды *AB,* где $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$ (рис. 2). Из данного определения следует, что фигура Ф, имеющая диаметр *d*, целиком помещается внутри круга радиуса *d*, описанного из любой ее точки *C* как из центра. Поэтому, если $d \to 0$, то фигура Ф «стягивается в точку». Аналогично определяется диаметр пространственного тела.

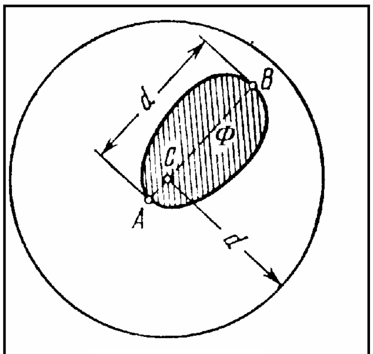


Рис 2.

Пусть $d = max\, d_i$ - наибольший из диаметров ячеек $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots \Delta S_n$. Предполагая, что в формуле (1) число ячеек n неограниченно возрастает ($n \to \infty$), причем диаметр наибольшей из них становится сколь угодно малым ($d \to 0$), в пределе получим точную формулу для объема цилиндроида

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (2)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (2), называется *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области S,* и обозначается следующим образом:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_S f(x,y) dS \quad (3)$$

Поэтому для объема цилиндроида окончательно имеем

$$V = \iint_S f(x,y) dS .$$

Обобщая конструкцию, примененную для вычисления объема цилиндроида, приходим к следующим определениям.

Определение 1. Двумерной интегральной суммой (1) от данной функции $f(x, y)$, по области S**,** называется сумма парных произведений площадей элементарных ячеек ΔS_i области S на значения $f(x_i, y_i)$ функции $f(x, y)$ в выделенных точках этих ячеек. (Рис. 3).

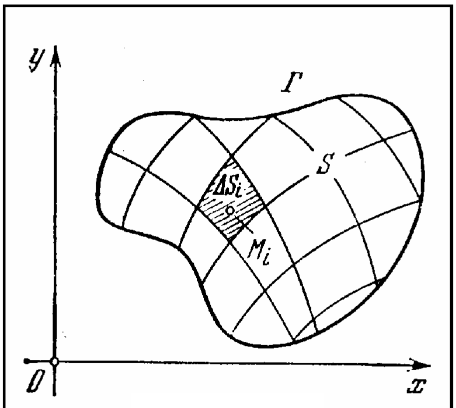


Рис 3.

Определение 2. Двойным интегралом (3) от функции $f(x, y)$, по области S**,** называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы (1) при неограниченном возрастании числа n элементарных ячеек ΔS_i; и стремлении к. нулю их наибольшего диаметра d при условии, что этот предел существует и не зависит от способа дробления области S на элементарные ячейки ΔS_i, и выбора точек в них.

В формуле (3) $f(x, y)$ называется подынтегральной функцией, S - областью интегрирования, а dS элементом площади. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Если область S с кусочно-гладкой границей Г ограничена и замкнута, а функция $f(x, y)$ непрерывна в области S**,** то двойной интеграл

$$\iint_S f(x,y) dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (4)$$

т. е. предел соответствующей двумерной интегральной суммы, существует и не зависит от способа дробления области S на элементарные ячейки ΔS_i, и выбора точек в них.

В дальнейшем мы будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены. (Область интегрирования можно также обозначать D, G и т. д.)

Если $f(x, y) \geq 0$, то двойной интеграл (4) представляет собой объём прямого цилиндроида, построенного на области *S* как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (геометрический смысл двойного интеграла).

Можно провести аналогию с понятием обыкновенного определенного интеграла. Так в определенном интеграле $[a, b]$ - область интегрирования, производится разбиение области на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, мерой для которых является их длина. В случае двойного интеграла *S* - область интегрирования, разбиение на элементы ΔS_i, мера для которых площадь. Забегая вперед можно предположить, что в тройном интеграле будет производиться разбиение на элементы ΔV_i с мерой объема.

Так как значение двойного интеграла не зависит от вида элементарных ячеек, то в дальнейшем при решении задач мы будем использовать это обстоятельство, выбирая наиболее подходящие сетки. Весьма часто удобной оказывается прямоугольная сетка, образованная пересечением двух систем прямых, параллельных соответственно координатным осям *Ox* и *Oy* (рис. 4).

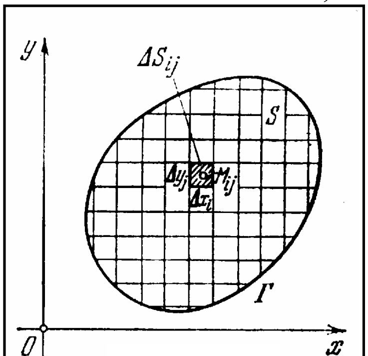


Рис. 4.

В этом случае элементарными ячейками ΔS_{ij} являются прямоугольники со сторонами, равными Δx_i и Δy_j, за исключением возможно ячеек примыкающих к границе **Г**. Чтобы подчеркнуть использование прямоугольной сетки, в обозначении интеграла (3) полагают $dS = dx\,dy$ - двумерный элемент площади в прямоугольных координатах. Тогда

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1} \sum_{i=1} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_j ,$$

где $(x_i, y_j) \in \Delta S_{ij}$ и сумма распространяется на все значения *i* и *j*, для которых $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$. (Непрямоугольные ячейки, примыкающие к границе Г, не влияют на значение предела.)

<u>Вычисление двойного интеграла.</u>

<u>Двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах.</u>

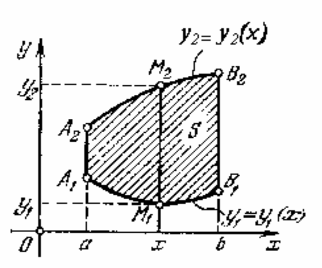


Рис. 5.

Предположим, что область интегрирования *S* представляет собой криволинейную трапецию (рис. 5):

$a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$,

где $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$- однозначные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Такую область будем называть <u>стандартной</u> относительно оси Oy. Вертикаль, проходящая через точку x оси Ox при $a < x < b$, пересекает границу Г области S только в двух точках $M_1(x, y_1)$ («точка входа») и $M_2(x, y_2)$ («точка выхода»).

Пусть $z = f(x, y)$ - функция непрерывная в области *S*, и $I = \iint\limits_S f(x,y)dxdy$ - ее двойной интеграл.

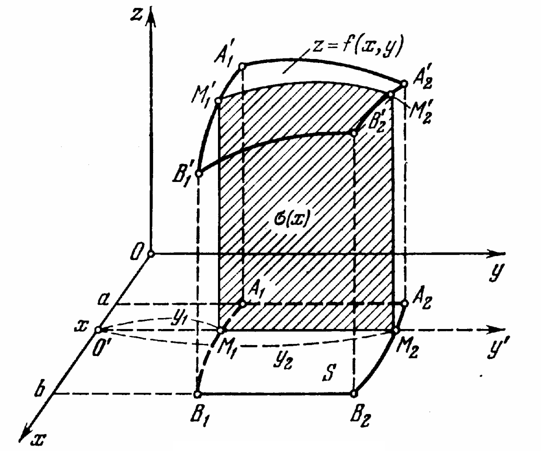


Рис. 6.

Предположим, что $f(x,y) \geq 0$ в области S. Тогда двойной интеграл I (согласно геометрическому смыслу) представляет собой объем цилиндроида, снизу областью S, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью.

Для вычисления объема I применим метод сечений. А именно, пусть $\sigma(x)$- площадь сечения цилиндроида плоскостью $M_1M_2M_2'M_1'$, перпендикулярной оси Ox в точке $x \in [a, b]$ (рис. 6). Тогда имеем

$$I = \int_a^b \sigma(x)dx. \quad (1)$$

Но $\sigma(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $y_1 \leq y \leq y_2$ оси $O'y' \| Oy$ и сверху кривой $z = f(x, y)$, $x = const$. Поэтому

. (2)

Можно доказать, что при наших условиях $\sigma(x)$ непрерывна при $x \in [a, b]$.

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получим окончательно

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \quad (3)$$

Таким образом, двойной интеграл равен соответствующему повторному интегралу.

В случае знакопеременной функции $z = f(x, y)$, например, если $f(x,y) \geq 0$ при $(x,y) \in S_1$ и $f(x,y) < 0$ при $(x,y) \in S_2$ ($S_1 \cup S_2 = S$), двойной интеграл равен алгебраической сумме объемов V_1 и V_2 цилиндроидов, построенных соответственно на основаниях S_1 и S_2 (рис. 7), т. е.

$$\iint_S f(x,y)dS = V_1 - V_2$$

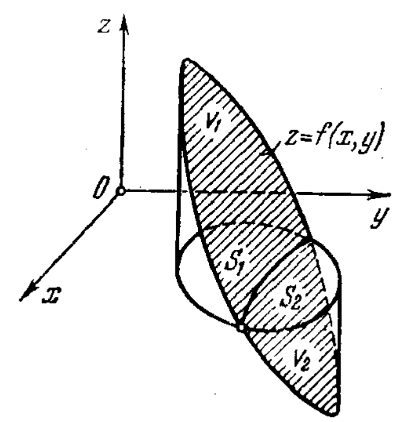


Рис. 7.

Можно доказать, что формула (3) справедлива и в этом случае.

Замечание 1. Если область S- стандартная относительно оси Ox, то есть (рис. 8.) $A \leq y \leq B$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, то по аналогии с формулой (3) получаем

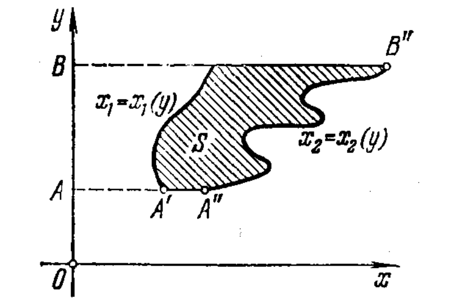


Рис. 8.

S_p

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_A^B dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

В частности, если область S есть прямоугольник: $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$ (рис. 9), то имеем

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_A^B f(x,y)dy \text{ и}$$

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_A^B dy \int_a^b f(x,y)dx\,.$$

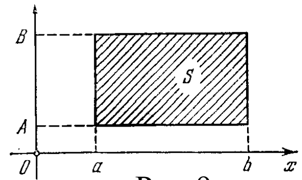


Рис.9

Замечание 2. Если область S- нестандартная, то ее разбивают (если это возможно) на конечное число областей $S_1, S_2, \cdots, S_p$, стандартных относительно осей координат Ox или Oy и интеграл разбивают на сумму интегралов:

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \cdots \iint_{S_p}\,.$$

Пример 1. Найти $I = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, где S - квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Согласно замечанию 1 расставим пределы интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2 + y^2\right)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D (x + y + 3)dxdy$ если область D ограничена линиями $x + y = 2,\ x = 0,\ y = 0$. (Рис. 10)

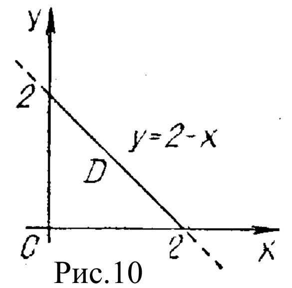


Рис.10

Область интегрирования D ограничена прямой $y = 2 - x$ и осями координат. Поэтому

$$\iint_D (x + y + 3)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + y + 2)dy =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{(x + y + 3)^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(25 - (x+3)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(25x - \frac{(x+3)^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{26}{3}$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_S (x - 2y)dxdy$ если область S ограничена линиями $y = x^2$, $y = x$.

Область интегрирования ограничена прямыми $x = 0$ и $x = 1$, а также линиями $y = x^2$ и $y = x$. (Рис. 11) Следовательно

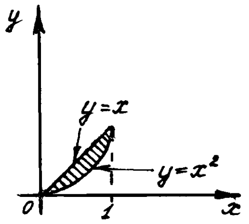


Рис. 11.

$$\iint_S (x - 2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x - 2y)dy =$$

$$\int_0^1 \left(xy - y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = -\int_0^2 \left(x^3 - x^4\right)dx =$$

$$-\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{20}$$

Пример 4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$$

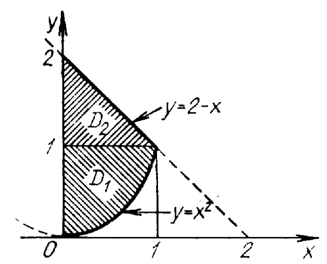


Рис. 12.

Область интегрирования D ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=x^2$ и $y=2-x$. (Рис. 12) Так как правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y=1$ разбивает ее на области D_1: $0\le y\le 1$, $0\le x\le\sqrt{y}$ и D_2: $1\le y\le 2$, $0\le x\le 2-y$. В результате получаем

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$$

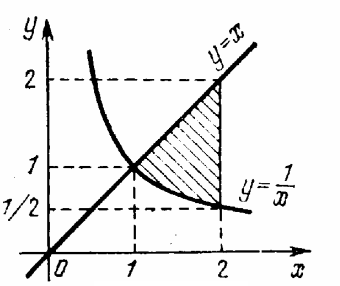


Рис. 13.

Пример 5. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, если область интегрирования D ограничена линиями $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$ (рис 3).

1 способ. Форма области D позволяет записать интеграл как повторный в следующем виде:

$$I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 x^2dx\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y^2}dy=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Bigg|_{1/x}^{x}\right)dx=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=2\frac{1}{4}$$

2 способ. Если теперь поменять порядок интегрирования, то прямая $y=1$ разделит область интегрирования на 2 части и интеграл будет вычисляться как сумма двух повторных интегралов, а именно

$$I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\int_{1/y}^{2}x^2dx+\int_1^2\frac{dy}{y^2}\int_{1/y}^{2}x^2dx$$

$$\int_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/y}^{2}+\int_1^2\frac{dy}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{y}^{2}=\int_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3y^3}\right)+\int_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{y^3}{3}\right)=$$

$$\int_{1/2}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_1^2\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\left(-\frac{8}{9y^3}+\frac{1}{18y^6}\right)\Bigg|_{1/2}^{1}+\left(-\frac{8}{9y^3}-\frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_1^2=2\frac{1}{4}$$

Очевидно, что первый способ вычисления в данном примере целесообразнее второго.

Свойства двойного интеграла.

Обобщим все вышесказанное как свойства двойного интеграла и его геометрический и физический смыслы.

1. $\iint\limits_D dS = S_D$, где S_D - площадь области интегрирования *D*.

2. Если подынтегральная функция $z = f(x, y) = \mu(x, y)$ - поверхностная плотность материальной пластины, занимающей область D, то масса этой пластины определяется по формуле

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)dS .$$

В этом заключается *физический смысл двойного интеграла.*

3. Если $f(x, y) \geq 0$ в области D, то двойной интеграл численно равен объему цилиндроида, нижним основанием которого является область D, верхним – часть поверхности $z = f(x, y)$, проектирующаяся в D, а боковая поверхность – цилиндрическая, причем ее прямолинейные образующие параллельны оси *Oz* и проходят через границу области D. (См. рис. 1.) Если $f(x, y) \leq 0$ в области *D*, то двойной интеграл численно равен объему цилиндрического тела, находящегося под плоскостью *Oxy*, взятому со знаком «-«. Если же функция *f*(*x*, *y*) в области интегрирования меняет знак, то двойной интеграл численно равен разности объемов цилиндрических тел, находящихся над плоскостью *Oxy* и под ней (рис. 7), т. е.

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = V_1 - V_2 .$$

Это свойство выражает *геометрический смысл двойного интеграла.*

4. Если функции $z_i = f_i(x, y)(i = 1, k)$ непрерывны в области *D*, то верна формула

$$\iint\limits_D \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x, y) \right) dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_D f_i(x, y)dS .$$

5. Постоянный множитель *C* подынтегральной функции можно выносить за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_D Cf(x,y)dS = C\iint\limits_D f(x,y)dS .$$

6. Если область *D* разбить на конечное число областей $D_1, D_2, \cdots, D_k$, не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области *D* равен сумме интегралов по областям D_k

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dS + \cdots \iint\limits_{D_k} f(x, y)dS$$

Теорема о среднем.

Теорема. Для непрерывной функции *z* = *f*(*x*, *y*) в области *D* площадь которой S_D, всегда найдется хотя бы одна точка $P(\xi, \eta) \in D$, такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = f(\xi, \eta) \cdot S_D .$$

Число $f(\xi, \eta)$ называется средним значением функции *z* в области *D*.

$$\mu = f(\xi, \eta) = \frac{1}{S_D} \cdot \iint\limits_D f(x, y)dS$$

Следствие 1. Если $z = f(x, y) \neq const$ и $m = \min\limits_{D} f(x, y)$, $M = \max\limits_{D} f(x, y)$, то $m \cdot S_D \leq \iint\limits_{D} f(x, y) dS \leq M \cdot S_D$.

Доказательство: Так как $z = f(x, y)$ непрерывна на D поэтому на D существуют точки, в которых функция достигает своего минимума и максимума, с соответствующими значениями $m = \min\limits_{D} f(x, y)$, $M = \max\limits_{D} f(x, y)$.

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

$m \cdot S_D \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \leq M \cdot S_D$, где $S_D = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$ - площадь области D. Если в данном двойном неравенстве перейти к пределу при $d = \max\limits_{D} d(\Delta S_i) \to 0$ то

$$m \cdot S_D \leq \iint\limits_{D} f(x, y) dS \leq M \cdot S_D \lhd$$

Следствие 2. Если в области D для непрерывных функций $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ выполняется неравенство $f_1(x, y) \leq f(x, y) \leq f_2(x, y)$, то

$$\iint\limits_{D} f_1(x, y) dS \leq \iint\limits_{D} f(x, y) dS \leq \iint\limits_{D} f_2(x, y) dS.$$

Двойной интеграл в полярных координатах.

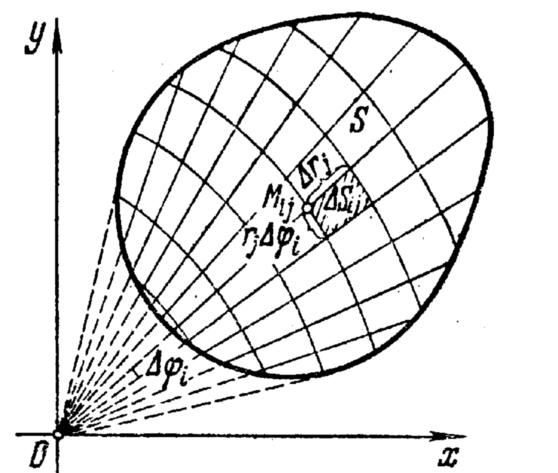


Рис. 14.

Пусть в интеграле $\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy$ мы хотим перейти к полярным координатам $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. (1)

D Разобьем область D интегрирования на элементарные ячейки ΔS_{ij} с помощью координатных линий $r = r_j$ (окружности) и $\varphi = \varphi_i$ (лучи) (рис. 14). Введем обозначения $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$, $\Delta \varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Так как окружность перпендикулярна радиусам, то внутренние ячейки ΔS_{ij} с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости относительно их площади можно рассматривать как прямоугольники с измерениями $r_j \Delta \varphi_i$ и Δr_j; поэтому площадь каждой такой ячейки будет равна $\Delta S_{ij} \approx r_j \Delta \varphi_i \Delta r_j$. Что касается ячеек неправильной формы, примыкающих к границе области интегрирования, то эти ячейки не повлияют на значение двойного интеграла и мы их будем игнорировать.

S_{ij}

В качестве $M_{ij} \in \Delta S_{ij}$ выберем вершину ΔS_{ij} с полярными координатами r_j и φ_i. Тогда декартовы координаты точки M_{ij}

$$x_{ij} = r_j \cos\varphi_i, \; y_{ij} = r_j \sin\varphi_i,$$

и следовательно $f(x_{ij}, y_{ij}) = f(r_j \cos\varphi_i, r_j \sin\varphi_i)$.

Найдем двойной интеграл как предел интегральной суммы

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i,j}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\Delta S_i = \lim_{d\to 0}\sum_{i,j}^{n} f(r_j\cos\varphi_i, r_j\sin\varphi_i)r_j\Delta\varphi_i\Delta r_j,$$

где d - максимальный размер ячеек ΔS_{ij} и сумма распространена на все ячейки указанного выше вида, целиком содержащиеся в области интегрирования. С другой стороны величины r_j и φ_i суть числа и их можно рассматривать как прямоугольные декартовы координаты некоторых точек плоскости $O\varphi r$. Таким образом, полученная сумма является интегральной суммой для функции $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r$, соответствующая прямоугольной сетке с линейными размерами Δr_j и $\Delta\varphi_i$. Следовательно

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i,j}^{n} f(r_j\cos\varphi_i, r_j\sin\varphi_i)r_j\Delta\varphi_i\Delta r_j = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr.$$

Окончательно получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr. \quad (2)$$

Выражение $dS = rd\varphi dr$ (3)

называется *двумерным элементом площади в полярных координатах.* Таким образом, чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам, достаточно координаты x и y заменить по формулам (1) , а вместо элемента площади dS подставить выражение (3).

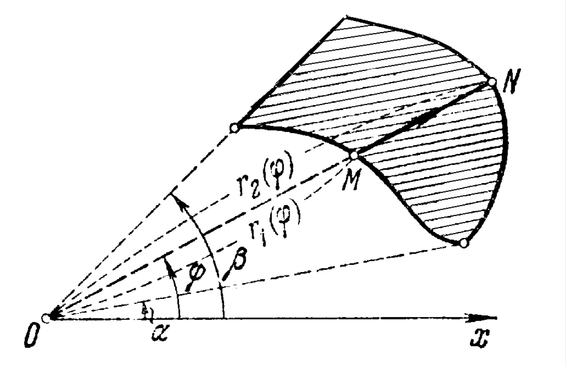


Рис. 15.

Для вычисления двойного интеграла (2) его нужно заменить повторным. Пусть область интегрирования определяется неравенствами

$$\alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),$$

где $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$- однозначные непрерывные функции на отрезке $[\alpha,\beta]$ (рис. 15). Тогда по аналогии с прямоугольными координатами (см. раздел) имеем

$$\iint\limits_D F(r,\varphi)d\varphi dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)dr \quad (4),$$

где

$$F(r,\varphi) = rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Пример 1. Переходя к полярным координатам r и φ вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где D- первая четверть круга радиуса R=1 с центром в начале координат (рис. 16).

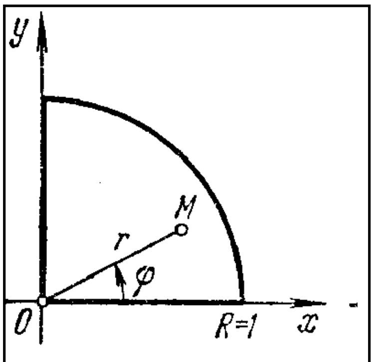


Рис. 16

Подставим формулы (1) для полярных координат и получим $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Область интегрирования D определяется неравенствами $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $0 \le r \le 1$. Поэтому запишем интеграл

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_D \frac{rd\varphi dr}{r}=\iint_D d\varphi dr=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 dr=$$

$$=\int_0^{\pi/2} d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

Пример 2. В интеграле $I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy$ перейти к полярным координатам. В данном случае область интегрирования есть треугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $y = x$ и $x = 1$ (рис. 17).

В полярных координатах уравнения этих прямых записываются следующим образом: $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $r\cos\varphi=1$ и, следовательно, область интегрирования определяется неравенствами $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ и $0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi}$. Отсюда на основании формулы (4), учитывая что $\sqrt{x^2+y^2}=r$, имеем

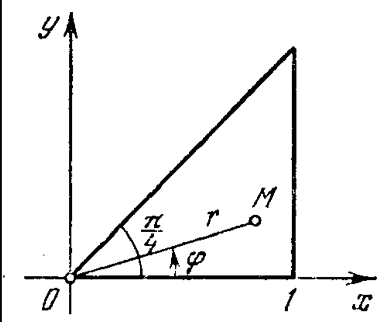


Рис. 17.

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy=\iint_D r\cdot rdrd\varphi=\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r^2dr$$

Пример 3. Перейти к полярным координатам и вычислить $I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где область интегрирования D определяется неравенством $x^2+y^2\le 2ax$.

Преобразуем уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$, подставляя формулы (1). Получаем уравнение в полярных координатах $r=2a\cos\varphi$ (рис 18). Учитывая, что $\sqrt{x^2+y^2}=r$ интеграл приводим к виду

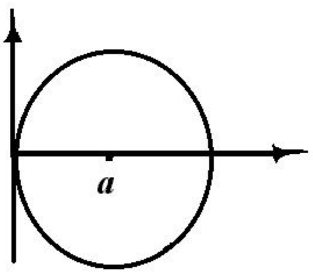


Рис. 18.

$$I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^3dr=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\cos\varphi}\right)=4a^4\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi=$$

$$=4a^4\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=$$

$$=a^4\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=a^4\cdot\left.\left(\frac{3}{2}\varphi+\frac{\sin2\varphi}{2}+\frac{\sin4\varphi}{4}\right)\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{3}{2}a^4$$

Интеграл Эйлера-Пуассона.

С помощью полярных координат можно просто вычислить важный для теории вероятностей интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ -*Эйлера-Пуассона* , который также называют «интеграл вероятностей». Чтобы вычислить этот интеграл рассмотрим важный частный случай при вычислении двойных интегралов. Пусть область интегрирования D определяется неравенствами $a \le x \le b$, $A \le y \le B$ (прямоугольник см рис. 9), а подынтегральная функция $f(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$, то есть является произведением функций, зависящих только от одной переменной. $X(x)$ - функция непрерывная на $[a, b]$ и зависящая только от x, $Y(y)$ - функция непрерывная на $[A, B]$ и зависящая только от y. Можно записать интеграл как повторный следующим образом

$$\iint\limits_D X(x)\cdot Y(y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_A^B X(x)\cdot Y(y)dy = \int\limits_a^b X(x)dx\int\limits_A^B Y(y)dy \quad (1)$$

Поскольку внутренний интеграл в (1) есть постоянное число, то его можно вынести за знак внешнего интеграла, и мы получим

$$\iint\limits_D X(x)\cdot Y(y)dxdy = \int\limits_A^B Y(y)dy\cdot\int\limits_a^b X(x)dx = \int\limits_a^b X(x)dx\cdot\int\limits_A^B Y(y)dy \quad (2),$$

то есть двойной интеграл равен произведению двух однократных интегралов.

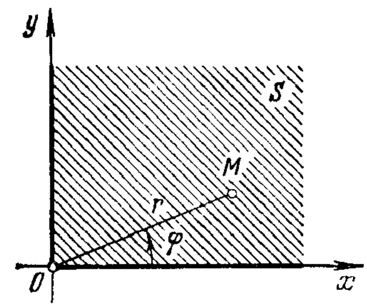


Рис. 19.

Теперь вычислим интеграл Эйлера-Пуассона. Для этого вспомним, что определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования и записи $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$ эквивалентны. Теперь используем формулу (2), то что произведение этих однократных интегралов можно рассматривать как двойной интеграл от произведения подынтегральных функций, тогда

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint\limits_S e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (3),$$

где область интегрирования S определяется неравенствами

$$0 \le x < +\infty,\ 0 \le y < +\infty$$

и, следовательно, представляет собой первый квадрант координатной плоскости Oxy (рис 19). φ

Переходя в интеграле (3) к полярным координатам, получим

$$I^2 = \iint\limits_S e^{-r^2} r d\varphi dr = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда, учитывая положительность числа $I > 0$, находим

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

В силу четности функции $y = e^{-x^2}$ имеем также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

что представляет собой площадь, ограниченную осью Ox и кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$ (рис 20).

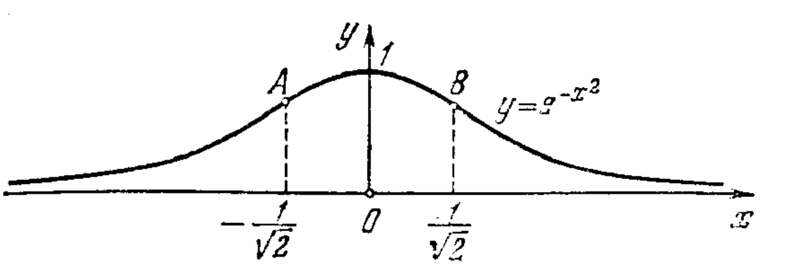


Рис. 20.

Геометрические и физические приложения двойного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Согласно 1-му свойству двойного интеграла $\iint_D dS = S_D$, где S_D - площадь области интегрирования D.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$.

По уравнениям границы области D строим данную фигуру (рис. 21.). Линии, ограничивающие ее пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 3$, то есть для D справедливы неравенства: $0 \le x \le 3$, $x^2 - 2x \le y \le x$ следовательно, на основании свойства 1 двойных интегралов искомая площадь

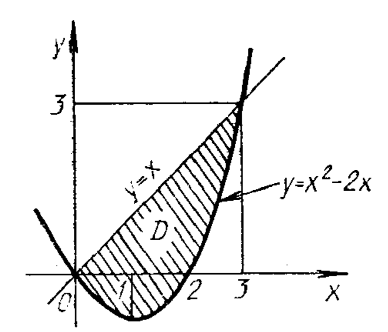


Рис. 21.

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^{x} dy = \int_0^3 \left(x - x^2 + 2xdx\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1 + cos\,\varphi)$ и $r = a\,cos\,\varphi$.

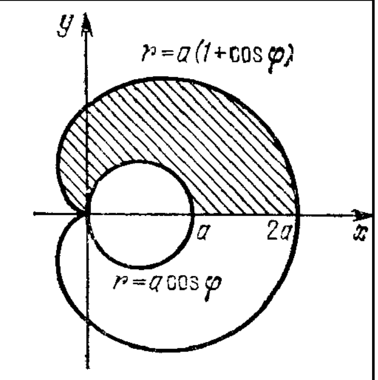


Рис. 22.

В плоскости Oxy данные кривые ограничивают область G, показанную на рис. 22. Вычисляя площадь, переходим в двойном интеграле к полярным координатам и учитываем симметрию фигуры.

$$S = \iint_G rdrd\varphi = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+cos\,\varphi)} rdr + 2\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+cos\,\varphi)} rdr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(r^2 \Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+cos\,\varphi)} \right) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(r^2 \Big|_0^{a(1+cos\,\varphi)} \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos\varphi) d\varphi + a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi = a^2 (1 + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ a^2 \left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2 .$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.

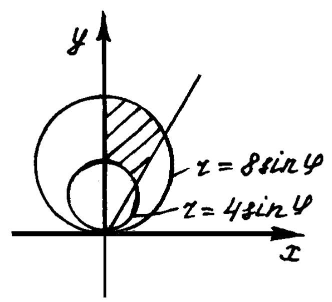


Рис. 23.

Чтобы упростить вычисление интеграла перейдем к полярным координатам.

1. $y^2 - 4y + x^2 = 0 \Rightarrow$

$$r^2 \sin^2\varphi - 4r\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi = 0$$

$$r^2 = 4r\sin\varphi \Rightarrow r = 4\sin\varphi$$

2. Аналогично получаем для второй линии $y^2 - 8y + x^2 = 0$ уравнение в полярных координатах $r = 8\sin\varphi$.

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \quad r\sin\varphi = \dfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad tg\varphi = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

4. $x = 0 \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Данная область изображена на рис. 23. Теперь запишем двойной интеграл в полярных координатах для вычисления искомой площади.

$$S = \iint_G r dr d\varphi = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r dr = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \right) = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{64\sin^2\varphi}{2} - \frac{16\sin^2\varphi}{2} \right) =$$

$$= 24 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = 12 \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 12 \cdot \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

<u>Вычисление объемов тел.</u>

Согласно геометрическому смыслу двойного интеграла (свойство 3) объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \ge 0$), снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, выражается интегралом

$$V = \iint_D f(x, y) dS .$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=4$, $z=0$.

Данное тело является цилиндроидом, ограниченным сверху плоскостью $x+z=4$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямыми цилиндрами $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ (рис. 24). Область интегрирования показана на рис. 24 б.

Имеем $z=4-x$ и соответствующий интеграл будет иметь вид

$$V=\iint_D (4-x)dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=\int_0^4(4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx=$$

$$=\int_0^4(4-x)\sqrt{x}dx=\left(4\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}.$$

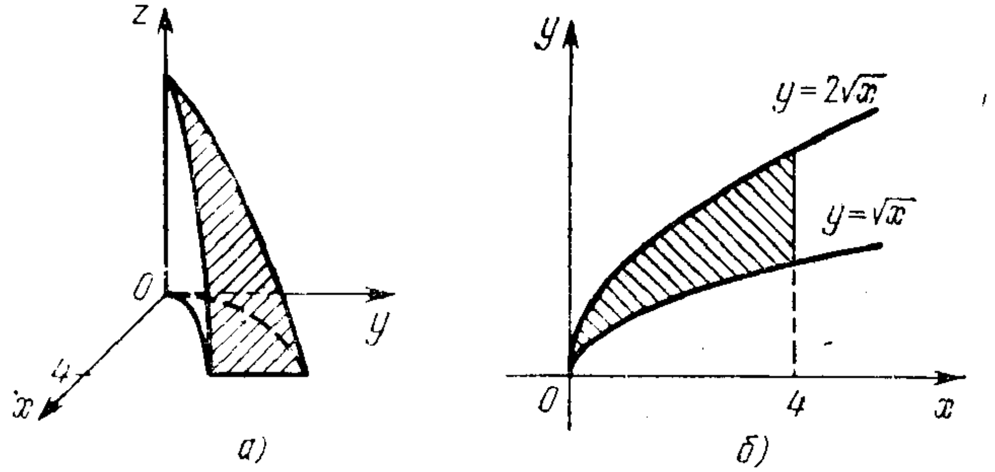


Рис. 24.

Пример 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x+y=1$, параллельной оси Oz, и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ (рис. 25). Искомый объем можно вычислить по формуле

$$V=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

где область D ограничена треугольником, лежащем в плоскости Oxy, для которого $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$. Следовательно,

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{3}\right)\Bigg|_0^{1-}$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$

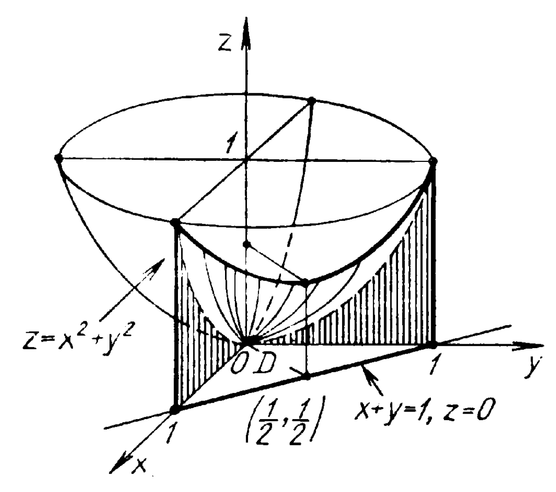


Рис. 25.

Вычисление площадей поверхностей.

Пусть в области D_z, плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные. Поверхность, определяемая такой функцией, называется *гладкой.* Очевидно, что область D_z есть проекция рассматриваемой поверхности на плоскость Oxy. Площадь Q_z поверхности $z = f(x, y), (x, y) \in D_z$, вычисляется по формуле

$$Q_z = \iint\limits_{D_z} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

В случае, когда гладкая поверхность задана функцией $x = f(y, z)$ (в области D_x) или функцией $y = f(x, z)$ (в области D_y), площадь этой поверхности вычисляется по формуле

$$Q_x = \iint\limits_{D_x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \text{ или}$$

$$Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz .$$

Пример 6. Вычислить площадь части конуса $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4x$.

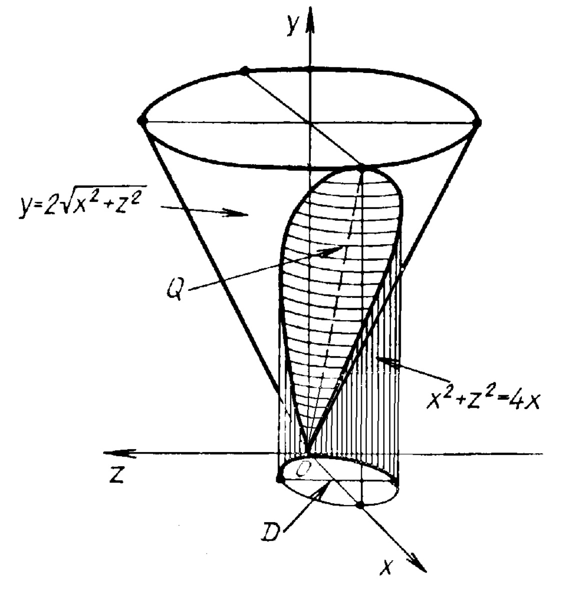


Рис. 26.

Так как поверхность задана функцией вида $y = f(x, z)$, то ее площадь Q_y следует вычислять по формуле $Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$, где область D_y проекция данной поверхности на плоскость Oxz (рис. 26). Эта проекция представляет собой круг, ограниченный окружностью $(x-2)^2 + z^2 = 4$.

Так как $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ и $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, то искомая площадь

$$Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + z^2} + \frac{4z^2}{x^2 + z^2}}\, dxdz = \sqrt{5}\iint\limits_{D_y} dxdz =$$

В данном интеграле имеет смысл перейти к полярным координатам, а именно $z = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$, тогда уравнение окружности $x^2 + z^2 = 4x \Rightarrow \quad r = 4\sin\varphi$ и $dxdz = rdrd\varphi$.

$$= \sqrt{5}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} rdr = \sqrt{5}\int_0^{\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{4\sin\varphi} d\varphi = 8\sqrt{5}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = 4\sqrt{5}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{5}\left.\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\right|_0^{\pi} = 4\pi\sqrt{5}$$

Вычисление массы материальной пластинки.

Согласно физическому смыслу двойного интеграла

$m = \iint\limits_D \mu(x, y)dS$, где $z = \mu(x, y)$ - поверхностная плотность материальной пластины, занимающей область D. (Свойство 3).

Пример 7. Вычислить массу материальной пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $x = (y-1)^2$, $y = x - 1$, если ее поверхностная плотность $\mu = y$.

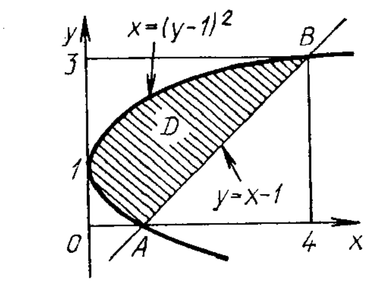


Рис. 27.

Координаты точек пересечения линий, ограничивающих область D: $A(1, 0)$, $B(4, 3)$ (рис. 27). Поэтому искомая масса

$$m = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{(y-1)^2}^{y+1} ydx =$$

$$= \int\limits_0^3 y(y + 1 - (y-1)^2)dy = \int\limits_0^3 (3y^2 - y^3)dy =$$

$$= \left(y^3 - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

Вычисление статистических моментов и координат центра масс.

Если на плоскости Oxy дана материальная пластинка D с непрерывной поверхностной плотностью $\mu(x,y)$, то координаты ее центра масс $C(x_C, y_C)$ определяются по формулам:

$$x_C = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}, \quad y_C = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}.$$

Величины

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy \text{ и } M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$$

называются *статистическими моментами пластинки D* относительно осей Ox и Oy соответственно.

Пример 8. Найти координаты центра масс пластинки D, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$ $x = 2$ (рис. 28), если ее плотность $\mu(x,y) = xy$.

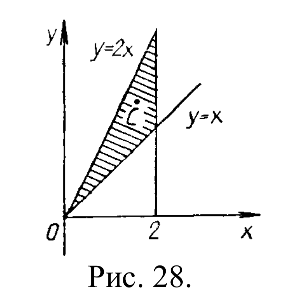


Рис. 28.

Сначала определим массу пластинки D:

$$m = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} xydy =$$

$$= \int\limits_0^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x(4x^2 - x^2)dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 x^3dx = \frac{3}{8}x^4\Big|_0^2 = 6$$

Согласно формулам координаты центра масс:

$$x_C = \frac{1}{m}\iint_D x^2 y dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2 dx \int_x^{2x} y dy = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2 \frac{1}{2}(4x^2 - x^2)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{20}\right|_0^2 = \frac{8}{5}$$

$$y_C = \frac{1}{m}\iint_D xy^2 dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 x dx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{1}{6}\int_0^2 x \left.\frac{y^3}{3}\right|_x^{2x} dx = \frac{7}{18}\int_0^2 x^4 dx = \frac{112}{45}$$

Тройной интеграл и его приложения.

По аналогии с двойным интегралом определяется так называемый *тройной интеграл.*

Определение. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $V \in R^3$, ограниченной некоторой замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S. С помощью произвольных гладких поверхностей разобьем область V на n элементарных областей V_i, объем которых обозначим ΔV_i. В каждой из элементарных областей V_i выберем точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ (рис. 29).

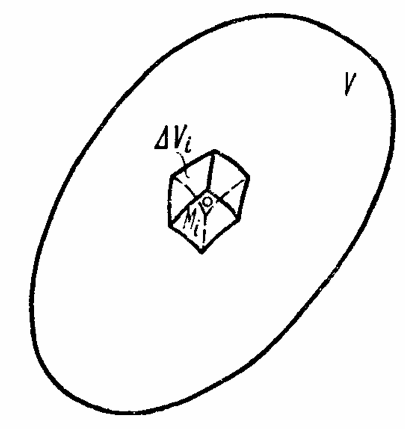


Рис. 29.

Построим сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ (1). Ее мы будем называть *трехмерной интегральной суммой.*

Обозначим через d наибольший из диаметров ячеек (элементарных областей) ΔV_i. (Диаметр ячейки определяется так же как и для плоской области в двойном интеграле. (См. соответствующий раздел.) Будем произвольным образом неограниченно измельчать ячейки ΔV_i. Тогда предел интегральной суммы (1) при $d \to 0$, если этом предел существует и не зависит от формы ячеек ΔV_i и выбора точек M_i в них, называется тройным интегралом по области V, и обозначается

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \quad (2).$$

Доказано, если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области V, то интеграл (2) существует и не зависит от способа разбиения V на элементарные области ΔV_i и выбора точек в них.

Многие свойства двойных и тройных интегралов совпадают, поэтому приведем только те свойства, которые несколько отличаются от свойств двойных интегралов.

1. Если в области V $f(x, y, z) = 1$ $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint_V dV = V,$$ где V - объем области интегрирования.

2. В случае, когда подынтегральная функция $f(x, y, z)$ задает плотность $\delta(x,y,z)$ тела, занимающего область V, тройной интеграл выражает массу этого тела:

$$m = \iiint_V \delta(x,y,z)dV.$$

В этом состоит *физический смысл тройного интеграла.*

В декартовой системе координат область V удобно разбивать на элементарные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям. При этом они являются прямоугольными параллелепипедами и элемент объема считают равным $dV = dxdydz$ и тройной интеграл (2) записывают в следующем виде: $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$.

Считаем область V правильной (стандартной) относительно оси Oz, то есть такой, что прямые параллельные данной оси пересекают область не более чем в двух точках, то есть ограничена снизу и сверху соответственно однозначными непрерывными поверхностями $z_1 = \psi_1(x,y)$ и $z_2 = \psi_2(x,y)$ соответственно (рис. 30). Проекция области на координатную плоскость Oxy есть плоская область D.

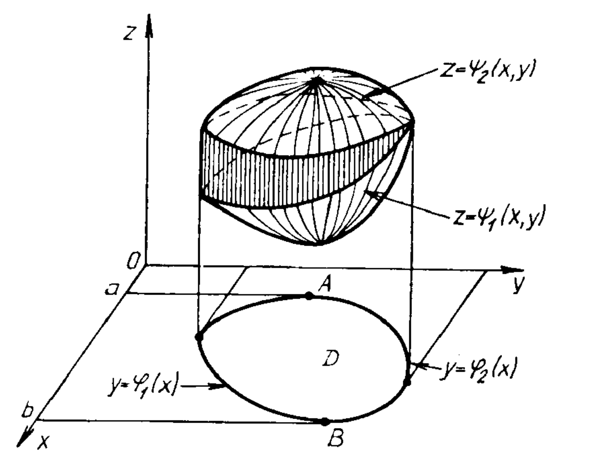


Рис. 30

Отсюда следует, что при фиксированных значениях $(x,y)\in D$ соответствующие аппликаты z точек области V изменяются в пределах $\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)$. По аналогии с двойным интегралом будем иметь

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

.

Если кроме того область D стандартна относительно оси Oy и определяется неравенствами $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $[a,b]$, то получаем окончательно

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \quad (3).$$

Данная формула применяется для вычисления тройного интеграла. Таким образом, при вычислении тройного интеграла в случае простейшей правильной области V вначале интегрируют функцию $f(x,y,z)$ по одной из переменных (например, z) при условии, что оставшиеся две переменные принимают любые постоянные значения в области интегрирования, затем результат интегрируют по второй переменной (например, y) при любом постоянном значении третьей переменной в V и, наконец, выполняют интегрирование по третьей переменной (например, x) в максимальном диапазоне ее изменения в V. Частный случай, если область интегрирования прямоугольный параллелепипед, задаваемые неравенствами $V=\{a\le x\le b, c\le y\le d, p\le z\le q\}$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_p^q f(x,y,z)dz.$$

Более сложные области интегрирования разбиваются на конечное число правильных областей, и результаты интегрирования по этим областям суммируются. (Аналогично подобным случаям двойного интеграла.)

Пример 1. Вычислить $I=\iiint\limits_V zdxdydz$, где V - пирамида $OPQR$, ограниченная следующими плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (рис.31).

Проекция области V на координатную плоскость Oxy есть треугольник S,

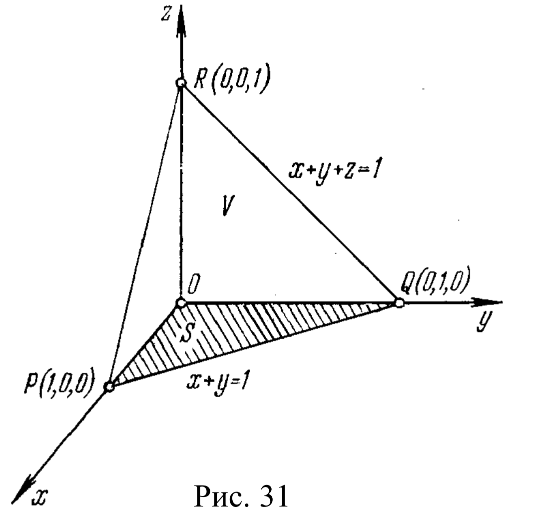


Рис. 31

ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

В правильной области V справедливы неравенства $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$, $0\le z\le 1-x-y$. Поэтому

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y}=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left((1-x)^2-2y(1-x)+y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left((1-x)^2y-y^2(1-x)+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\int_0^1\left((1-x)^3-(1-x)^3+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{(1-x)^4}{12}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{24}.$$

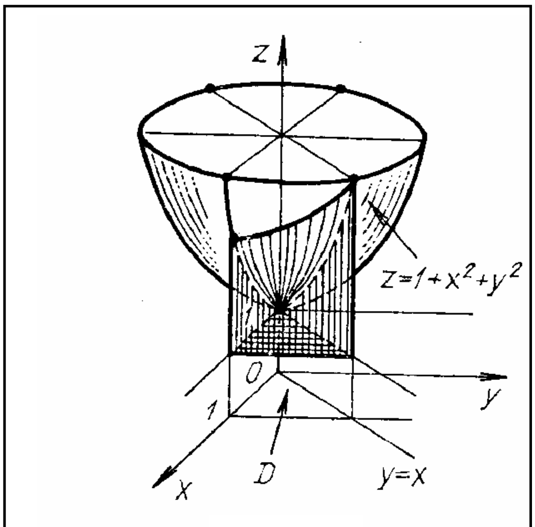


Рис. 32.

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V(2x+y)dxdydz$, где V ограничена поверхностями: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=1$, $z=1+x^2+y^2$.

По заданным поверхностям строим область интегрирования (рис. 32). В области V справедливы неравенства: $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$, $1\le z\le 1+x^2+y^2$. Тогда

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_1^{1+x^2+y^2}(2x+y)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dy(2x+y)z\Big|_0^{1+x^2+y^2}=\int_0^1 dx\int_0^x(2x+y)(x^2+y^2)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\left(2x^3+y^3+2xy^2+x^2y\right)dy=\int_0^1\left(2x^3y+\frac{1}{4}y^4+\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^x dx=$$

$$=\int_0^1\frac{41}{12}x^4dx=\frac{41}{60}$$

Цилиндрические и сферические координаты. Замена переменных в тройном интеграле.

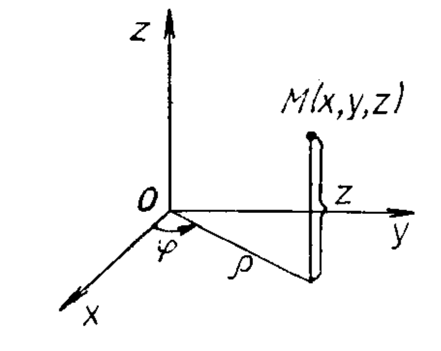


Рис. 33.

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются *цилиндрические* и *сферические* координаты.

Зададим в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат x, y, z. Произвольная точка M пространства определяется также тройкой чисел (ρ,φ,z), где z- по-прежнему ее аппликата, а (ρ,φ)- полярные координаты точки $(x, y,)$ на плоскости Oxy в предположении, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox (рис. 33). Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi,\\ y &= \rho\sin\varphi,\\ z &= z \end{aligned}\right\}$$

При этом формула для замены переменных в тройном интеграле записывается следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

осуществляет переход от *сферических* координат в пространстве к декартовым (рис. 34). Здесь ρ - расстояние точки $M(x, y, z)$ до начала координат (длина радиус-вектора), θ - угол между радиус вектором $\vec{\rho}$ точки M и осью Oz (широта или склонение), φ - двугранный угол между полуплоскостью, содержащей положительную часть оси Ox и ось Oz, и полуплоскостью, содержащей Oz и точку M (долгота). Переход к сферическим координатам в тройном интеграле осуществляется по формуле:

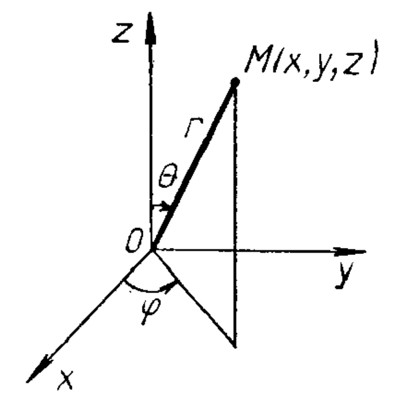


Рис. 34.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

Пример 1. Вычислить $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область интегрирования V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=1$, $z=2$, $z=3$.

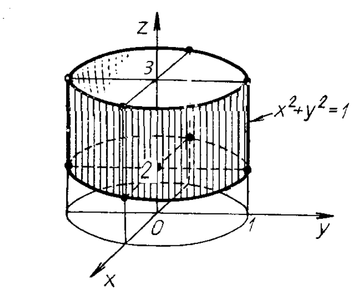


Рис. 35.

По заданным поверхностям построим область V (рис. 35.) и перейдем в интеграле к цилиндрической системе координат. При этом координаты будут удовлетворять неравенствам: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, $2 \le z \le 3$. Интеграл запишется как

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} \rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_2^3 dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_2^3 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\left|\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi\right.$$

Пример 2. Вычислить $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, где область интегрирования V - шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Поскольку в тех случаях, когда функция $f(x,y,z)$ имеет форму $f\left(x^2+y^2+z^2\right)$, а область интегрирования шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ удобно переходить к сферическим координатам.

$$I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \iiint\limits_{V_1} \frac{\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta}{1+\rho^3} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2\sin\theta d\rho}{1+\rho^3} =$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\left(\ln\left(1+\rho^3\right)\Big|_0^1\right)d\varphi=\frac{1}{3}\ln 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{4}{3}\pi\ln 2$$

Приложения тройных интегралов.

Вычисление объемов. Выполняется на основании формулы $\iiint\limits_V dV=V$.

Пример 1. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями: $z=1$ $z=5-x^2-y^2$.

По заданным уравнениям поверхностей в декартовых координатах строим область V (рис. 36). Тогда в цилиндрической системе координат

$$V=\iiint\limits_{V_1}\rho d\rho d\varphi dz,$$

где V_1: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$, $1\le z\le 5-\rho^2$. Следовательно

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_1^{5-\rho^2}dz=2\pi\int_0^2\rho\left(5-\rho^2-1\right)d\rho=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi$$

Вычисление массы тела. Выполняется на основании *физического смысла тройного интеграла* (см. свойства).

Пример 2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью конуса $(z-2)^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$, если плотность тела $\delta(x,y,z)=z$.

Вершина конуса находится в точке O_1 $O_1(0, 0, 2)$, и в сечении конуса плоскостью : $z=0$ получается окружность $x^2+y^2=4$ (рис. 37). Поверхность рассматриваемого тела $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда масса

$$m=\iiint\limits_V zdxdydz=\iiint\limits_{V_1}z\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_1^{2-\rho}zdz=\pi\int_0^2\rho(2-\rho)^2d\rho=\pi\left(2\rho^2-\frac{4\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}\pi.$$

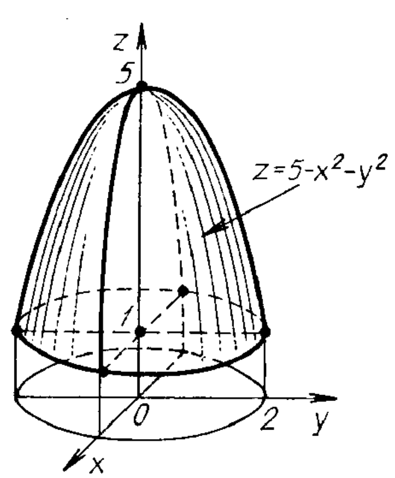


Рис. 36.

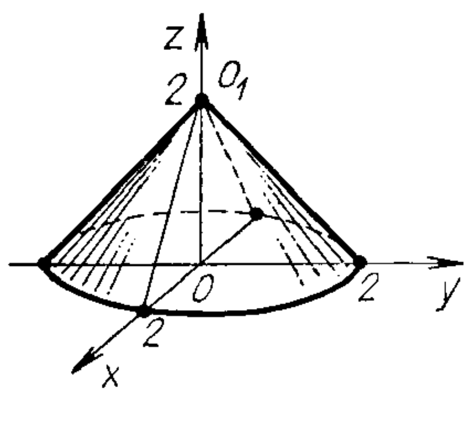


Рис. 37.