Введение в линейную алгебру и аналитическую геометрию.

Определители.

Теория матриц и определителей является введением в линейную алгебру. Наиважнейшим применением этой теории является решение систем линейных уравнений.

Понятие определителя ввел в 1693 году немецкий математик Лейбниц, но это его открытие было забыто. Только в 1750 году понятие заново определил швейцарский математик Крамер. Но всеобщее применение в математике детерминат завоевал в конце 18 столетия.

Определение 1. Пусть задана квадратная таблица из 4-х чисел: a_1, a_2, b_1,b_2.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Такая таблица называется ***матрицей*** 2-го порядка.

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем 2 –го порядка и обозначается символом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Числа a_1, a_2, b_1,b_2 - ***элементы определителя***. В определителе также есть строки 1-я и 2-я, столбцы 1-й и 2-й, а также 2 диагонали: главная и побочная.

Более распространенным является другое обозначение элементов определителя с двумя индексами.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где a_{ij} – элементы определителя. i – номер строки, j – номер столбца. Например a_{12} – элемент в первой строке и втором столбце.

Тогда определитель 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = -17$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) = 8$$

Замечание: Элементами определителя могут быть не только числа, но и любые алегебраические выражения.

Например: $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

Определение 2. Определителю третьего порядка соответствует таблица из 9-ти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

И называется число находимое следующим образом:

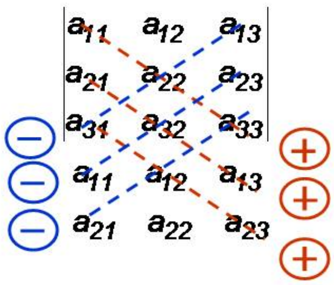
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Этот способ называется *разложение по первой строке* определителя.
Можно вычислить определитель по *правилу Саррюса*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Произведения элементов берутся с соответствующим знаком «+» или «-» , и складываются.



Примеры:
Вычислим разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 41 = -7$$

По правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot (-3) \cdot 7 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot 4 =$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{matrix}$$

$$= 18 - 20 - 21 + 16 = -7$$

$$\begin{matrix} 4 & -3 & 0 \end{matrix}$$

Определитель называется ***треугольным***, если все элементы, стоящие под или над главной диагональю равны нулю. В этом случае определитель находится, как произведение элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \cdot (-2) = 30$$

Можно обобщить вышесказанное и сказать, что для любой таблицы чисел размера *nxn* существует вычисляемое особым образом число, называемое определителем или детерминантом *n* - ного порядка.

Обозначение: $\Delta = det\left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Мы не будем давать строгое математическое определение, так как это выходит за рамки нашей программы, но мы научимся вычислять определитель любого порядка. Для этого мы введем несколько новых понятий.

Определение 3. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента определителя a_{ij} назовем выражение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – определитель, который получается путем вычеркивания i –той строки и j – того столбца, т. е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 18 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -18$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -44 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 44$$

Теперь мы сможем вычислить определитель с помощью разложения его по элементам строки (столбца).

Определитель n –ного порядка равен произведению элементов a_{ij} некоторой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения A_{ij} этих элементов.

Т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots a_{in} \cdot A_{in}$$

(разложение по строке.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots a_{nj} \cdot A_{nj}$$

(разложение по столбцу.)

Пример: Разложим по первой строке:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$-3\cdot 10-2\cdot(-18)+1\cdot 32=-30+36+32=38$

Таким способом вычислять определители нерационально. Для того чтобы упростить это действие необходимо знать свойства определителей.

Основные свойства определителей.

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.

Пример: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot(-1)+1\cdot 3=9$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 1-1\cdot(-7)=9$$

Такая операция (замена строк столбцами) называется ***транспонирование***.

2. При перестановке двух столбцов (или строк) определитель меняет знак.

Пример: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4+2=6$

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

3. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (или строки) равны нулю.

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0-0=0$$

4. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-2=0$$

5. Общий множитель элементов некоторого столбца (или строки) можно выносить за знак определителя. Т.е. если все элементы строки (или столбца) умножить на число k, то определитель увеличится в k раз.

Следовательно: если элементы двух столбцов (или строк) пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (или строки)прибавить соответствующие элементы любого другого столбца (или строки), предварительно умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -5\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}0 & -5\\ -1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 2-2\cdot(-5)+1\cdot(-3)=9$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -5\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 3 & 2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}0 & -5\\ 0 & 2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9$$

Матрицы. Основные понятия.

Определение. Таблица mхn чисел a_{ij} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов называется ***матрицей***.

Элементы матрицы a_{ij} нумеруются аналогично элементам определителя т.е. i – номер строки, j – номер столбца.

Обозначение: A, B, C. $m \times n$ – ***размерность матрицы***.

Определение. Матрица у которой число столбцов равно числу строк ($m = n$) называется квадратной.

Для квадратной матрицы можно вычислить определитель $detA$.

Если $m = 1$, то матрица состоит из одной строки и называется ***матрица-строка***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Если $n = 1$, то матрица соответственно называется ***матрица-столбец***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Эти матрицы также называют *вектор-строка* и *вектор-столбец* соответсвенно.

Определение. Две матрицы A и B одинаковой размерности называются равными если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны. $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение. Квадратная матрица вида

называется ***единичной*** матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Матрица все элементы которой равны нулю – ***нулевая*** матрица.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - верхняя треугольная матрица, у которой все элементы под главной диагональю равны нулю.

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - нижняя треугольная матрица, у которой все элементы над главной диагональю равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами.

Определение 1. Суммой матриц A и B (одинаковой размерности $m \times n$) называется матрица C той же размерности элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Обозначение: $C = A + B$.

Определение 2. Произведением числа α на матрицу А называют матрицу элеметны которой равны произведениям элементов a_{ij} матрицы А на число α, т. е. $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Обозначение. $C = \alpha A$.

Свойства операций сложения и умножения на число.

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
6. $A + 0 = A$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & 6+4 \\ 2+3 & -4+7 \\ -3+8 & 9-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

α = -2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$$\alpha \cdot A = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 0 \\ (-2)\cdot 7 & (-2)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$$

Если α = -1, то (-1)A = - A – матрица ***противоположная*** A.

$A + (-A) = 0$

Транспонирование матриц.

Если в матрице A сделать ее строки столбцами с тем же номером, то получим матрицу B транспонированную к A. Элементы матрицы B удовлетворяют условию $b_{ij} = a_{ji}$.

Обозначение. $B = A^T$

Умножение матриц.

Операция умножения определена когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Пусть дана матрица A размеров $m\times n$ и матрица B размеров $n\times p$. Матрицу C размером $m\times p$, элементы которой выражаются через элементы матриц A и B, как

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj},\ i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, p$$

назовем произведением A на B.

Т. е. каждый элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов i – той строки матрицы A на соответсвующие элементы j - того столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Обозначение: $C = A\cdot B$

Свойства операции умножения.

1. $AB \neq BA$.

Если $AB = BA$, то матрицы A и B – *перестановочные*.

2. $(AB)C=A(BC)$.
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Пример. Умножим $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ на $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Размерность A: 2×3 B: 3×2

Размерность матрицы C = AB: 2×2 .

$$c_{11} = 4\cdot(-1) + (-5)\cdot(-2) + 8\cdot 3$$
$$c_{12} = 4\cdot 5 + (-5)\cdot(-3) + 8\cdot 4$$
$$c_{21} = 1\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3$$
$$c_{22} = 1\cdot 5 + 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 4$$
$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} -4+10+24 & 20+15+32 \\ -1-6-3 & 5-9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Теперь умножим B на A.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Размерность матрицы $D = BA$: 3×3.

$$d_{11} = (-1)\cdot 4 + 5\cdot 1$$
$$d_{12} = (-1)\cdot(-5) + 5\cdot 3$$
$$d_{13} = (-1)\cdot 8 + 5\cdot(-1)$$
$$d_{21} = (-2)\cdot 4 + (-3)\cdot 1$$
$$d_{22} = (-2)\cdot(-5) + (-3)\cdot 3 = 1$$
$$d_{23} = (-2)\cdot 8 + (-3)\cdot(-1) = -13$$
$$d_{31} = 3\cdot 4 + 4\cdot 1 = 16$$
$$d_{32} = 3\cdot(-5) + 4\cdot 3 = -3$$
$$d_{33} = 3\cdot 8 + 4\cdot(-1) = 20$$
$$D = B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $AB \neq BA$.

Обратная матрица.

Определение. Квадратная матрица A называется ***вырожденной*** (особенной), если ее определитель равен 0, и ***невырожденной*** (неособенной) если $detA \neq 0$.

Для квадратной и невырожденной матрицы вводится понятие обратная матрица.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной невырожденной матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Известно, что для A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Метод вычисления обратной матрицы.

Матрица $A^{\vee}$ элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A называется матрицей ***присоединенной*** (или ***союзной***).

То есть если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{ij}.

Для вычисления обратной матрицы справедлива формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^T$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Вычислим определитель матрицы.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$\det A \neq 0$, следовательно матрица – невырожденная.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6$$

Записываем присоединенную матрицу:

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Транспонируем:

$$\left(A^{\vee}\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Получаем обратную матрицу (по формуле).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^T = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы.

Для решения и исследования многих математических задач большое значение имеет понятие ранга матрицы.

Рассмотрим матрицу A размерностью $m \times n$. Вычеркиванием k строк и k столбцов можно вычленить из данной матрицы квадратную матрицу k- го порядка (*подматрицу*), где $k \le \min(m; n)$. Определитель такой подматрицы называется ***минором k-го порядка*** матрицы A.

Обозначение: M_k.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Вычеркнув вторую и третью строки и третий и четвертый столбец получим подматрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ и $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6$.

Это минор второго порядка.

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка k сколькими способами можно выбрать номера строк и столбцов.

Определение. В матрице A размерностью $m \times n$ минор порядка r называется ***базисным***, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или миноров порядка $r + 1$ вообще нет т. е. r совпадает с $\min(m; n)$.

Определение. ***Рангом*** матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначение: $rang(A)$, $rg(A)$, $r(A)$.

Из определения следует:

1. Ранг матрицы А это порядок базисного минора.
2. Ранг матрицы А размера $m \times n$ не превосходит наименьшего из ее размеров, т. е. $r(A) \le \min(m; n)$;
3. $r(A) = 0$ только тогда, когда все ее элементы равны 0.

Теорема о ранге матрицы.

Ранг матрицы А равен числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

Пример. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 4 & 5\\ 1 & 8 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 0 & -6\end{pmatrix}$

Вычленим из этой матрицы минор 3-го порядка, вычеркивая все строки и второй, третий и четвертый столбец.

$$M_3=\begin{vmatrix}-1 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 6\end{vmatrix}=-192\neq 0$$

Наивысший минор в данной матрице $k \le min$ (3; 4), т.е k = 3, не равен 0.

Следовательно, $r(A) = 3$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для этого используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Элементарные преобразования матрицы.

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение строки (столбца) на число отличное от нуля.
3. Перестановка строк (столбцов).
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к такому виду, что она будет содержать только 1 и 0. (Поэтому иногда метод называют метод единиц и нулей.) Ранг матрицы при этом будет очевиден.

Пример. Вычислить ранг матрицы А.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5\\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

Матрица А размерности 4×5 следовательно ее ранг не выше 4 = min (4; 5).

Наибольшее число нулей в 3 м столбце поэтому умножим столбец на ½ и переставим на первое место, поменяв с 1-м.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5\\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -4 & -5\\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2\\ 2 & 3 & 6 & 8 & -3\end{pmatrix}\times(-2)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -4 & -5\\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

В первой строке можно поставить все 0 кроме 1-й единицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1)\times 1 \\ \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Теперь записываем 0 во вторую строку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 2 \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

Переставляем третий и четвертый столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Записываем нули в третью строку, и убираем (-1) умножив вторую строку на это число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице осталось всего 3 единицы.

Все миноры 4- го порядка нулевые. Единственный ненулевой минор третьего порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$r(A) = 3$.

Системы линейных уравнений.

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

называется *системой линейных уравнений*, содержащей m уравнений и n неизвестных.

Числа a_{ij} – коэффициенты системы, b_i – свободные члены системы, x_i – неизвестные.

Определение. Коэффициенты, стоящие перед неизвестными, записанные в виде матрицы называются *матрицей системы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Неизвестные и свободные члены системы можно записать в виде векторов – столбцов.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор – столбец неизвестных.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - вектор – столбец свободных членов.

В таком случае систему уравнений можно записать в компактной матричной форме: $A \cdot X = B$.

Если в матрицу системы добавить столбец свободных членов, то получим *расширенную матрицу системы*.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Если все свободные члены системы равны 0, то система называется *однородной*.

Определение. Совокупность из n чисел называется решением системы (1) если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство после подстановки в него этих чисел вместо соответствующих неизвестных.

Система уравнения называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Пример.

Система из 3-х уравнений с 3 неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица системы для нее: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ расширенная матрица $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -8 \\ 4 & -7 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Однородная система:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Методы решения систем линейных уравнений.

Метод Крамера.

Теорема (правило Крамера). Система из n уравнений с n неизвестными (2) в случае, когда определитель системы не равен 0 ($detA \neq 0$), имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель системы, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы, заменой i – того столбца столбцом свободных членов.

Это формула Крамера.

Примеры: 1. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 = 5 \\ 8x_1 - 7x_2 = -10 \end{cases}$

Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = -95 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -110$$

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-95}{-1} = 95 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-110}{-1} = 110$$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-18} = -\frac{5}{18} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-18} = \frac{7}{18}$$

Метод Гаусса.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений систем линейных уравнений является *метод Гаусса* или метод последовательного исключения неизвестных.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Ей соответствует расширенная матрица системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Выполняя *элементарные преобразования* строк расширенной матрицы системы можно привести ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1k} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \tilde{a}_{2k} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_1 \end{array}\right)$$

При этом система будет приведена соответственно к виду:

$$\begin{cases} x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\ldots+\tilde{a}_{1k}x_k+\cdots+\tilde{a}_{1n}x_n=\tilde{b}_1 \\ \qquad x_2+\ldots+\tilde{a}_{2k}x_k+\cdots+\tilde{a}_{2n}x_n=\tilde{b}_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_k+\cdots+\tilde{a}_{mn}x_n=\tilde{b}_m \end{cases}$$

То есть в данной системе из уравнений исключены неизвестные. Это действие называется *прямой ход метода Гаусса*.

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем подробно шаги метода Гаусса.

Прямой ход.

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. (Если $a_{11} = 0$, то на первое место в системе переставим то уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля.) a_{11} – ведущий коэффициент. Разделим первое уравнение (первую строку расширенной матрицы) на a_{11}. Последовательно умножая первое уравнение на $-a_{i1}$ и складывая с i-м уравнением (строкой), исключим x_1 из всех уравнений кроме первого. Получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1+a_{12}^{(1)}x_2+\ldots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots \\ \quad a_{2m}^{(1)}x_2+\ldots+a_{mn}^{(1)}x_n=b_m^{(1)} \end{cases} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right)$$

Далее аналогичным образом, считаем главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, делим на него второе уравнение и затем исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений кроме первого. Продолжая подобным образом мы получим систему ступенчатого вида.

Обратный ход.

Решаем ступенчатую систему, которая в общем случае имеет бесконечное множество решений. Начинаем с последнего уравнения и выражаем x_k через остальные неизвестные ($x_{k+1}, \ldots, x_n$). Затем подставляем x_k в предпоследнее уравнение и выражаем x_{k-1}. Далее последовательно находим $x_{k-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Замечание.

1. Если ступенчатая система получается треугольной в случае системы из n уравнений с n неизвестными, то исходная система имеет единственное решение которое мы находим, поднимаясь по системе вверх от x_n к x_1.
2. Если число уравнений и неизвестных не совпадает получаем бесконечное множество решений придавая свободным неизвестным ($x_{k+1}, \ldots, x_n$) произвольные значения.

На практике работают не с самой системой (1) а с ее расширенной матрицей, выполняя элементарные преобразования строк матрицы.

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \qquad\; + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + \; x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \times(-1)\times(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \times 2 \times 1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Данной расширенной матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \qquad\quad 4x_3 + 6x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\quad -x_4 = -2 \end{cases}$$

Отсюда: $x_4 = 2$

$$x_3 = \frac{-1 - 6x_4}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$x_2 = 1 - 3x_4 - 2x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 5 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2 = \frac{15}{4}$$

Совместность систем линейных уравнений.

Теорема (Кронекера – Капели). Система (1) имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, если ранг матрицы системы *A* равен рангу расширенной матрицы системы $\overline{A}$.

$$rang(A) = rang(\overline{A}) = r$$

Если $r = n$, то система имеет единственное решение; если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящее от $n - r$ параметров.

Примеры. Исследовать на совместность системы:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

Расширенная матрица системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \times(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Матрица системы: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $rang(A) = 2$

У расширенной матрицы системы существует минор третьего порядка не равный нулю. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Т.е. $rang(\overline{A}) = 3$

$rang(A) < rang(\overline{A}) \Rightarrow$ Система несовместна.

2.

Векторы. Линейные операции над векторами.

Определение 1. Направленный отрезок (или, что то же, упорядоченную пару точек) мы будем называть ***вектором***.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, **a**.

Нулевой вектор (у которого начало и конец совпадают): $\vec{0}$. Вектор характеризуется длиной и направлением.

Под модулем (длиной) вектора $\vec{a}$ понимаем его численное значение без учета направления.

$|\vec{a}| = a$, $|\vec{0}| = 0$

Вектор, длина которого равна 1 – единичный вектор. $|\vec{e}| = 1$.

Если ненулевой вектор $\vec{a}$ разделить на его длину получим единичный вектор (орт) направления. $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Определение 2. Два вектора называются ***равными***, то есть не различаются как векторы, если соответствующие отрезки параллельны, имеют одинаковую длину и направление.

Будем считать, что любые два равных вектора это один и тот же ***свободный*** вектор, то есть вектор, у которого не фиксировано конкретное начало и конец, так как направленный отрезок можно передвинуть параллельно самому себе и вектор при этом не изменится. В связи с этим слова "вектор параллелен прямой (плоскости)" и "вектор лежит на прямой (плоскости)" означают одно и то же.

Нулевой вектор направления не имеет. Считается, что он параллелен и перпендикулярен любому вектору.

Определение 3. Векторы называются ***коллинеарными***, если они параллельны одной прямой.

Определение 4. Векторы называются ***компланарными***, если они параллельны одной плоскости.

Линейные операции над векторами.

Определение 5. *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ служат сторонами параллелограмма, а вектор $\vec{c}$ его диагональю. (рис 1.).

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

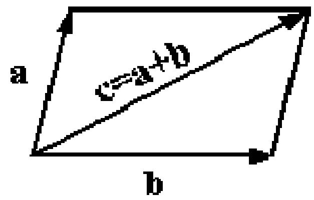


Рис.1.Сложение векторов по правилу параллелограмма.

Это сложение называется ***сложением по правилу параллелограмма***. Однако бывает более удобным использовать для сложения *правило треугольника.* Очевидно, что результаты сложения по правилу параллелограмма и по правилу треугольника одинаковы.

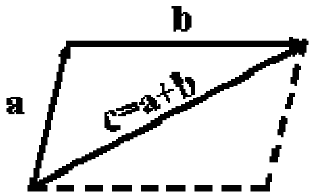


Рис. 2.Правило треугольника

Для каждого вектора $\vec{a}$ вектор существует ему противоположный – имеющий ту же длину, но противоположный по направлению. Он обозначается $-\vec{a}$.

$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$

Определение 6. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}$ и вектора противоположного $\vec{b}:\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}$.

Графически можно также изобразить разность векторов по правилу треугольника и параллелограмма.

Определение 7. *Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число α* называется вектор $\vec{b}$, определяемый условием

1. $\left|\vec{b}\right|=|\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

2. вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на α обозначается $\alpha\vec{a}$.(Рис.3.) $-1{,}5\vec{a}$

Рис.3 .Умножение вектора на число

Замечание. Иногда числа называют ***скалярами***. Таким образом, мы дали определение умножения вектора на скаляр.

Основные свойства операций сложения и умножения вектора на число.

Для любых векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ и любых вещественных чисел α, β выполняются следующие свойства:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство *коммутативности* операции сложения);
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (свойство *ассоциативности* операции сложения);

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (свойство ассоциативности по отношению к числам);

5. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (свойство *дистрибутивности* по отношению к умножению на число);

6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (свойство дистрибутивности по отношению к умножению на вектор;

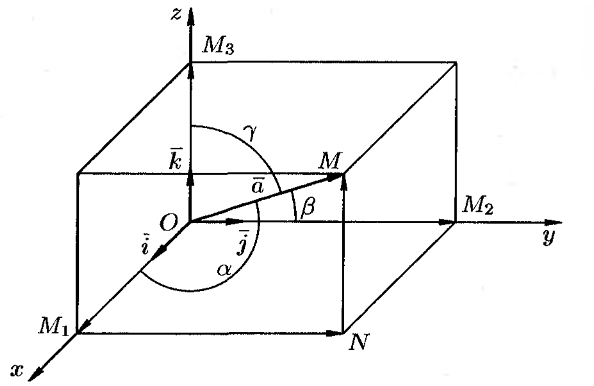
7. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Прямоугольная (Декартова) система координат в пространстве.

Декартова система координат в пространстве задается началом координат точкой O и базисом, состоящим из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (ортов) координатных осей OX, OY и OZ соответственно.

Выберем вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат т.O. Обозначим точку M как конец вектора. Вектор $\overrightarrow{OM}$ - радиус – вектор точки M. Вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$



Т.е. координатами вектора $\vec{a}$ в декартовой системе координат будут x, y, z.

$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$

Координаты точки M и вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадают: $M(x,y,z)$.

Зная координаты вектора можно найти его модуль: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Линейные операции над векторами заданными в координатной форме.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами. $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

Можно записать: $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2)$ и $\alpha\vec{a}=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$.

Примеры: $\vec{a}=(1,-2,3)$ $\vec{b}=(4,0,5)$.

$\vec{a}+\vec{b}=(1+4,-2+0,3+5)=(5,-2,8)$

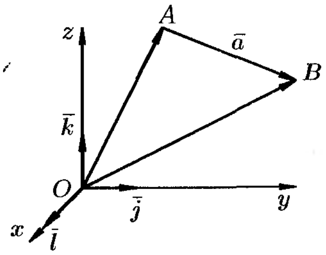
$\vec{a}-\vec{b}=(1-4,-2-0,3-5)=(-3,-2,-2)$

$2\vec{a}=(2\cdot 1,2\cdot(-2),2\cdot 3)=(2,-4,6)$

$-3\vec{b}=((-3)\cdot 4,(-3)\cdot 0,(-3)\cdot 5)=(-12,0,-15)$

Расстояние между двумя точками.

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.



Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Следовательно, координаты вектора равны разности координат его конца и начала.

Расстояние между точками A и B: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример: $A(1, 0, -3)$ $B(4, 2, -1)$

$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 2 - 0, -1 - (-3)) = (3, 2, 2)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

Деление отрезка в данном отношении.

Отношением в котором точка M делит отрезок M_1M_2 называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$ через координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Координаты векторов:

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$.

Векторы равны если равны их соответствующие координаты, из этого условия: $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (\lambda \cdot (x_2 - x), \lambda \cdot (y_2 - y), \lambda \cdot (z_2 - z))$

$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$

$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$

$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$

$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

Аналогично $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Если точка M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$.

Координаты середины отрезка M_1M_2:

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Пример: $M_1(3, -5, 8)$ $M_2(7, 13, -6)$.

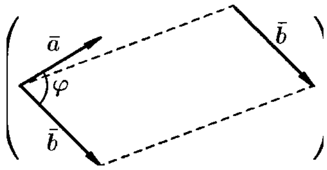
Координаты середины отрезка M_1M_2:

$x = \dfrac{3 + 7}{2} = 5$, $y = \dfrac{-5 + 13}{2} = 4$, $z = \dfrac{8 - 6}{2} = 1$.

$M(5, 4, 1)$

Угол между двумя векторами.

Определение. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют наименьший угол φ ($0 \le \varphi \le \pi$) на который нужно повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Скалярное произведение векторов.

Определение: Назовем скалярным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла φ между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$.

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Свойства скалярного произведения.

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$. (Переместительное свойство).
2. $\alpha \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (Сочетательное свойство).
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (Распределительное свойство).
4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
5. *Условие перпендикулярности векторов.*

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\vec{b} = 0$ и $\vec{a} \ne 0$ и $\vec{b} \ne 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Найдем их скалярное произведение.

Так как $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ можно умножить их как многочлены, используя свойства скалярного произведения.

$(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^{\,2} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + y_1z_2\vec{j}\vec{k}$
$z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}^2 = (*)$

$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = \vec{k}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = 0$ (так как все векторы взаимно перпендикулярны.)

$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^2 = 1$

$(*) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Условие перпендикулярности векторов: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Примеры: 1. Даны векторы $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{b} = (6, -3, 2)$.

Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=24+6-8=22$$

$$\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=2\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}\vec{a}-9\vec{b}^2=2\vec{a}^2+3\vec{a}\vec{b}-9\vec{b}^2=$$

$$\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=\left(\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\right)^2=36$$

$$\vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left(\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}\right)^2=49$$

$$=2\cdot 36+3\cdot 22-9\cdot 49=-303$$

2. Даны вершины четырехугольника A(1, -2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1), D(-5, -5, 3). Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Для этого нужно доказать, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны.

$\overrightarrow{AC}=(-5,3,-1)$, $\overrightarrow{BD}=(-6,-9,3)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-5)\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3=0$

Угол между векторами.

Определим угол φ между векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

Из определения скалярного произведения: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$, т.обр.

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Пример. Даны вершины треугольника АВС: A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1). Вычислить внешний угол при вершине В.

Внешний угол будет определяться как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $-\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}=(-3,0,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(7,0,1)$

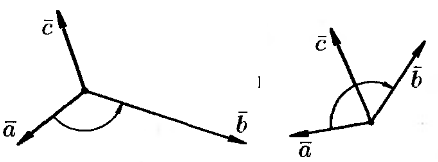
$$\cos\varphi=\frac{(-3)\cdot 7+(-4)\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{-25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varphi=3\pi/4$

Векторное произведение векторов.

Правая и левая тройка векторов.

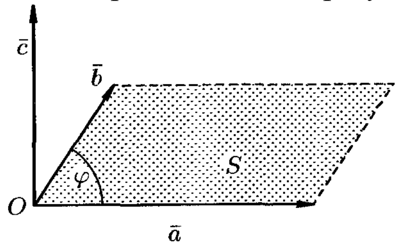
Определение. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой (левой), если направление вектора $\vec{c}$ таково, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то поворот по кратчайшему пути от $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виден как поворот против (по) часовой стрелке.



Определение. Векторными произведением вектора на вектор называется вектор , который:

1. перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.



Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$.

Свойства векторного произведения.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times a$. (Свойство анти-коммутативности.)
2. $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$. (Сочетательное свойство относительно скалярного множителя.)
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$. (Распределительное свойство.)
4. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

Следовательно $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, а также $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$.

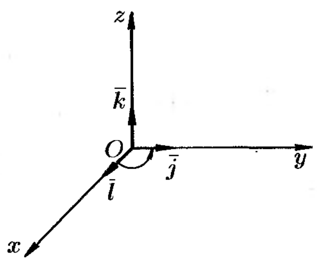
Выражение векторного произведения через координаты векторов.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$. Найдем их векторное произведение.

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ умножим их как многочлены, используя свойства векторного произведения.

$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \times \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \times$
$z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k} = (*)$

Найдем векторные произведения между ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

Т.к. $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i}$, то $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.

Аналогично

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

Подставим в (*) полученные выражения и учтем свойство 4.

$$(*) = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} =$$
$$= y_1z_2\vec{i} - z_1y_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - x_1z_2\vec{j} + x_1y_2\vec{k} - y_1x_2\vec{k} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Примеры. 1. Даны векторы $\vec{a} = (3,-1,-2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$**.** Вычислить $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 5 \cdot \vec{i} - (-1) \cdot \vec{j} + 7 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$$

2. Вычислить площадь ΔABC, если вершины $A(1, 2, 0)$, B(3, 0, 3), $C(5, 4, 3)$.

Согласно определению векторного произведения векторов

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, что является площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах. Т.е. $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ и тогда $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 2, 3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (-12) \cdot \vec{i} - (-6) \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (6)^2 + (12)^2} = \sqrt{144 + 36 + 144} = \sqrt{324} = 18$$

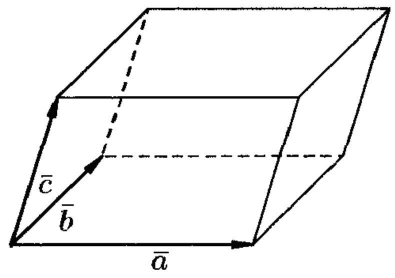
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$, где первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор.

Геометрический смысл выражения $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ **.**

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.



Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Поэтому обозначение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. (без знаков векторного и скалярного произведений.)

2. Векторное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$, но меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов сомножителей $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.
3. Смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарны.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов.

Пусть заданы три вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$. Найдем их смешанное произведение, используя координатные выражения для векторного и скалярных произведений.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

Координаты векторного произведения: $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$.

Умножим скалярно на $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot z_3=\begin{vmatrix}x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Полученную формулу можно преобразовать к виду:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Вычисление объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется как $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на тех же векторах $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Примеры:

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, 0)$, $\vec{b} = (3, -2, 4)$, $\vec{c} = (1, -2, 5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 11 = 15$$

2. Проверить, лежат ли 4 точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1,5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости.

Составим 3 вектора из данных точек и найдем их координаты: $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (1, -1, 4)$. Данные векторы должны лежать в одной плоскости и следовательно быть компланарными.

Убедимся в этом

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot (-10) + 6 \cdot 2 = -2 - 10 + 12 = 0$$

Условие компланарности векторов выполняется, то есть точки лежат в одной плоскости.

3. Даны вершины тетраэдра $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 2)$, $D(3, 0, -2)$. Найти его объем.

Найдем векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ на которых построен данный тетраэдр (треугольная пирамида).

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -2),\ \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -1),\ \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (3, 0, -2)$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-$$

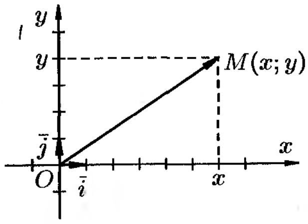
$$= 17 - 9 + 16 = 24$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6} \cdot 24 = 6$$

Аналитическая геометрия на плоскости.

Аналитическая геометрия – решение геометрических задач с помощью алгебры, для чего используется ***метод координат***.

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение любой точки плоскости. Система координат на плоскости аналогична введенной ранее декартовой системе координат в пространстве. Любая точка *M* на плоскости может быть задана своими координатами: (x, y). Эти два числа полностою определяют положение точки на плоскости, то есть каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка М на плоскости и наоборот.



Множество точек на плоскости могут образовать ***линию***. Например, прямую или окружность. При этом точки принадлежащие линии обладают определенными геометрическими свойствами.

Определение. Уравнение линии (уравнением кривой) на плоскости Oxy нозывается уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Например, если точка $M(x_1,y_1)$ лежит на кривой, то $F(x_1, y_1) = 0$ – верное равенство, если $N(x_2,y_2)$ не лежит на кривой то $F(x_2, y_2) \neq 0$.

Примеры: 1. Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = 4$.

Точка А (-2, 0) лежит на окружности так как $(-2)^2 + 0^2 = 4$, В (1, 1) – не лежит $1^2 + 1^2 \neq 4$.

2. $xy = 8$

$C(2, 4)$ – Лежит.

D (1, 5) – не лежит.

3. $y - 3x = 0$ $(y = 3x)$

E (3, 1) – лежит, K (2, 2) – не лежит.

Основные задачи.

1. Задано уравнение линии. Определить лежит ли точка на линии.

$x^2 + y^2 = 4$

$M(4, -2)$: $4^2 + (-2)^2 = 20 \neq 25$, т. е. не лежит.

K (-3, 4): $(-3)^2 + 4^2 = 25$ – лежит.

2. Найти точку пересечения 2-х линий. Для этого решается система уравнений.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$$

2 точки пересечения A(-2, 4) и B (2, 4).

Уравнение прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ (1) с произвольными коэффициентами A, B, C такими, что A и B не равны нулю одновременно, называется ***общим уравнением прямой***.

Уравнение (1) называется ***полным***, если A, B, C ≠ 0 и ***неполным*** если хотя бы один коэффициент равен 0.

Виды неполных уравнений.

1. $C = 0$. → $Ax + By = 0$ – прямая, проходящая через начало координат, т. к. точка с координатами $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяет уравнению.
2. $B = 0$ → $Ax + C = 0$ – прямая параллельная оси Oy.
3. $A = 0$ → $By + C = 0$ – прямая параллельная оси Ox.
4. $B = 0$, C = 0 → $Ax = 0$ –ось Oy.
5. $A = 0$, C = 0 → $By = 0$ –ось Ox

Теорема. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ является вектором перпендикулярным к прямой $Ax + By + C = 0$.

Этот вектор $\vec{n} = (A,\, B)$ называют вектором ***нормальным*** данной прямой (***вектором нормали***).

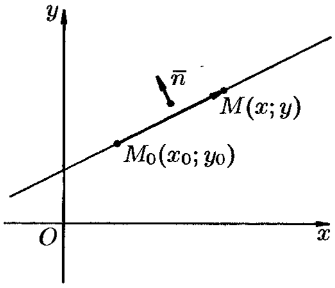
Задача. Записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,\, y_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n} = (A,\, B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x,\ y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$. Поскольку векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т. е. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Мы получили уравниение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$ (2)

Его можно переписать в виде общего уравнения прямой: $Ax + By + C = 0$.



2. Уравнение прямой «в отрезках».

Если в уравнении (1) $A, B, C \neq 0$.

$Ax + By = -C$

Разделим обе части уравнения на $-C$.

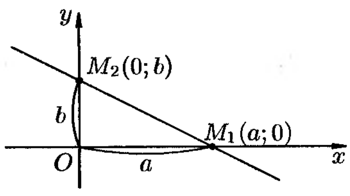
$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Обозначим: $a = -\dfrac{C}{A},\ b = -\dfrac{C}{B}$.

Таким образом получим уравнение:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (3) – уравнение прямой «в отрезках».

Числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.



3. Каноническое уравнение прямой.

Определение. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой будем называть ***направляющим*** вектором данной прямой.

Прямая линия считается полностью определенной, если на ней задана начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор.

Задача. Требуется найти уравнение прямой проходящей через данную точку M_0 и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}(l,\, m)$.

Точка $M(x, y)$ лежит на искомой прямой, тогда и только тогда, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору $\vec{q}$. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$ коллинеарен вектору $\vec{q}(l,\, m)$, если их координаты пропорциональны, таким образом получаем

$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ (4) – ***каноническое*** уравнение прямой.

Если уравнение приравнять параметру t : $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=t$, то получим

$\begin{cases} x=lt+x_0 \\ y=mt+y_0 \end{cases}$ (5) – ***параметрическое*** уравнение прямой.

Задача. Пусть даны 2 точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Составим из этих точек вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$. Данный вектор будет направляющим для искомой прямой. Т. е. $\vec{q}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$. Из канонического уравнения прямой получим

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (6) – уравнение прямой, проходящей через данные точки.

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Под углом наклона прямой α ($0 \le \alpha < \pi$) понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Число $k=tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой. Если направляющий вектор прямой $\vec{q}(l,\ m)$, то $tg\alpha=\dfrac{m}{l}$.

Пусть точка $M_0(x_0,\ y_0)$ лежит на прямой. Запишем каноническое уравнение $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

Перепишем уравнение в виде: $y-y_0=\dfrac{m}{l}(x-x_0)$.

Так как $k=tg\alpha=\dfrac{m}{l}$, то $y-y_0=k(x-x_0)$.

Данное уравнение преобразуем к виду $y=kx-kx_0+y_0$

$y=kx+y_0-kx_0$.

Обозначим: $b=y_0-kx_0 \Rightarrow y=kx+b$.

$y=kx+b$ (7) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Основные задачи на прямую.

Угол между прямыми.

Под углом между прямыми понимаем наименьший угол на который нужно повернуть первую прямую чтобы совместить со второй.

Очевидно, что угол между прямыми можно определить как угол между их нормальными или направляющими векторами.

а). Прямые заданны общими уравнениями.

L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1)$

L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2)$

Угол найдем по формуле для угла между векторами.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Отсюда условие параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, а условие перпендикулярности: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

б). Прямые заданы каноническими уравнениями.

L_1: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \Rightarrow \overrightarrow{q_1} = (l_1, m_1)$

L_2: $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} \Rightarrow \overrightarrow{q_2} = (l_2, m_2)$

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

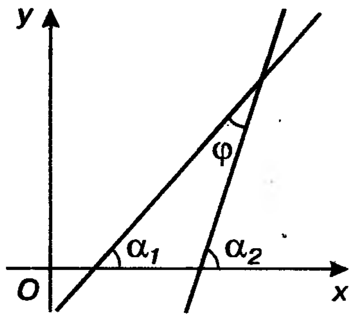
Условие параллельности прямых: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$, а условие перпендикулярности:

$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$.

в). Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом.

L_1: $y = k_1x + b_1$

L_2: $y = k_2x + b_2$

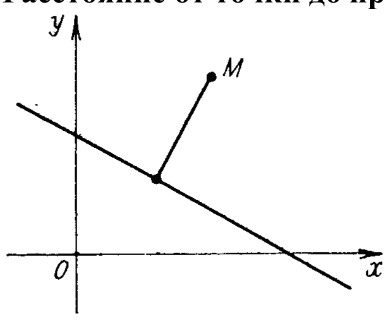


Если α_1 и α_2 углы наклона прямых, то угол между прямыми $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Так как $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha_1)$ и $k_2 = \mathrm{tg}(\alpha_2)$, то $tg(\varphi) = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg(\alpha_2) - tg(\alpha_1)}{1 + tg(\alpha_1)tg(\alpha_2)} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Если $\mathrm{tg}(\varphi) = 0$, то прямые параллельны. Т.е. условие параллельности: $k_1 = k_2$.

Если $\mathrm{tg}(\varphi)\to\infty$, то прямые перпендикулярны. Условие перпендикулярности: $1 + k_1 k_2 = 0$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Расстояние от точки до прямой.



Расстояние от точки до прямой это длина перпендикуляра, опущенного на прямую из точки.

Для прямой, заданной своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ расстояние определяем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Кривые второго порядка.

Определение. Линия, определяемая уравнением второй степени относительно декартовых координат:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

где A, B, C не равны нулю одновременно, есть кривая второго порядка.

Окружность.

Простейшей кривой второго порядка является окружность.

Определение. ***Окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. (Т. е. равноудаленных от точки M_0.)

Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты (a, b), а $M(x, y)$ – произвольная точка окружности. Из условия $M_0M = R$ получим уравнение:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R, \text{ то есть}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

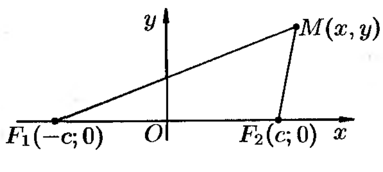
Уравнению (1) удовлетворяют все точки $M(x, y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки не лежащей на окружности. Уравнение (1) - ***каноническое уравнение окружности***.

Эллипс.

Определение. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости сумма расстояний, от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.

Выберем систему координат так чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox и начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь координаты: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса.



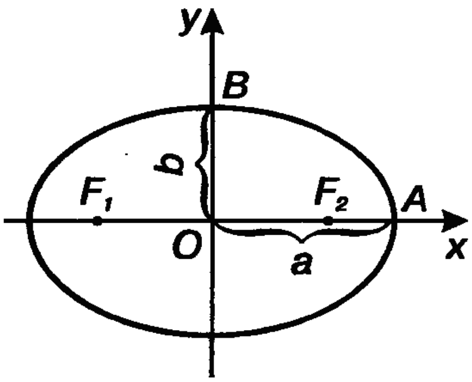
Расстояния от точки M до фокусов: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. По определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$. То есть $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

После преобразования данного уравнения можно получить ***каноническое уравнение эллипса***: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Эллипс фигура симметричная относительно осей *Ox* и *Oy*. *a* – ***большая полуось***, *b* – ***малая полуось***. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ***эксцентриситет эллипса***. Так как $a > c$, то у эллипса $\varepsilon < 1$. У окружности (как частного случая эллипса) $\varepsilon = 0$.

Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов, является линейной функцией от ее абсциссы: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$. Эти расстояния ***фокальные радиусы***.

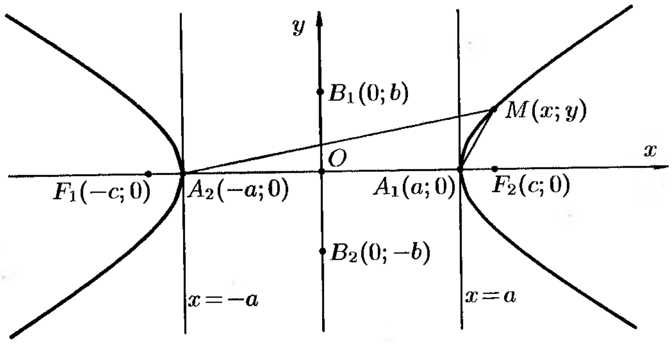


Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество всех точек плоскости разность расстояний, от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.

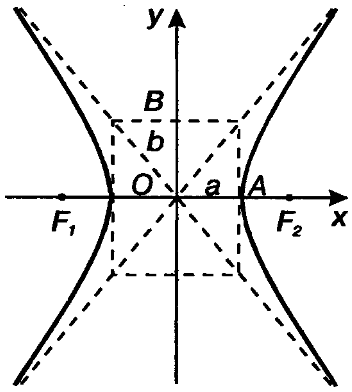
Выберем систему координат так чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси *Ox* и начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь координаты: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы.



Расстояния от точки *M* до фокусов: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. По определению гиперболы $|r_1 - r_2| = 2a$. То есть $\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$.

После преобразования данного уравнения можно получить ***каноническое уравнение гиперболы***: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. $c^2 = a^2 + b^2$



Гипербола фигура симметричная относительно осей Ox и Oy. a – ***действительная полуось***, b – ***мнимая полуось***. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ***эксцентриситет гиперболы***. У гиперболы $a < c$, то есть $\varepsilon > 1$. Линии $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ - ***асимптоты*** гиперболы.

Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе, до каждого из фокусов следующим образом зависит от ее абсциссы: $r_1 = |a + \varepsilon x|$, $r_2 = |a - \varepsilon x|$. Эти расстояния ***фокальные радиусы***.

Парабола.

Определение. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой называемой ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Выберем систему координат так чтобы фокусы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. В выбранной системе фокус F имеет координаты $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

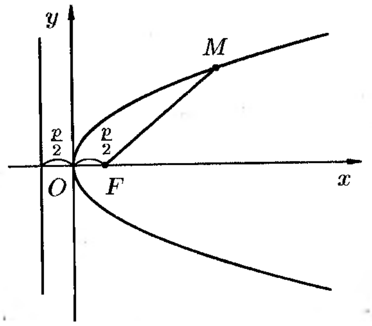
Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Пусть d – расстояние от точки M до директрисы, а $r = MF$.

По определению $d = r$.

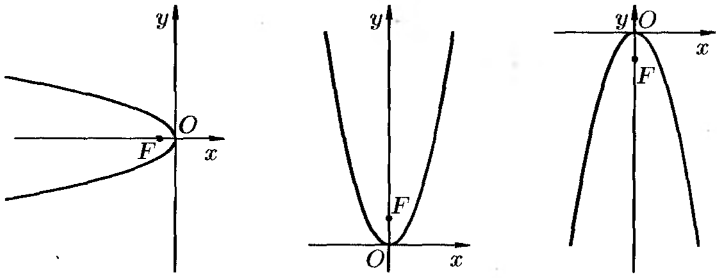
$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

Из условия равенства получим ***каноническое уравнение параболы***: $y^2 = 2px$



Нетрудно показать что уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ также определяют параболы.



$y^2 = -2px$ $x^2 = 2py$ $x^2 = -2py$

Аналитическая геометрия в пространстве.

Поверхность в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и их координатами (x, y, z). Поэтому свойство общее всем точкам поверхности можно записать виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Определение. Уравнением поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек не лежащими на этой поверхности.

Плоскость в пространстве.

В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) , где A, B, C, D - заданные числа, причем хотя бы одно из чисел A, B или C должно быть отлично от нуля, и обратно уравнение (1) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является вектором перпендикулярным к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Его называют вектором ***нормальным*** данной плоскости (***вектором нормали***).

Уравнение (1) называется ***полным***, если A, B, C, $D \neq 0$ и ***неполным*** если хотя бы один коэффициент равен 0.

Виды неполных уравнений.

1. $D = 0. \rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – плоскость, проходящая через начало координат, т. к. точка с координатами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ удовлетворяет уравнению.
2. $A = 0 \rightarrow By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельная оси Ox.
3. $B = 0 \rightarrow Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельная оси Oy.
4. $C = 0 \rightarrow Ax + By + D = 0$ – плоскость параллельная оси Oz.

5. $A = 0$, $B = 0 \rightarrow Cz + D = 0$ – плоскость параллельная координатной оси Oxy.
6. $B = 0$, $C = 0 \rightarrow Ax + D = 0$ – плоскость параллельная координатной оси Oyz.
7. $A = 0$, $C = 0 \rightarrow By + D = 0$ – плоскость параллельная координатной оси Oxz.
8. $B = 0$, $C = 0$, $D = 0 \rightarrow x = 0$ – координатная плоскость Oyz.
9. $A = 0$, $C = 0$, $D = 0 \rightarrow y = 0$ – координатная плоскость Oxz.
10. $A = 0$, $B = 0$, $D = 0 \rightarrow z = 0$ – координатная плоскость Oxy.

Уравнение плоскости «в отрезках».

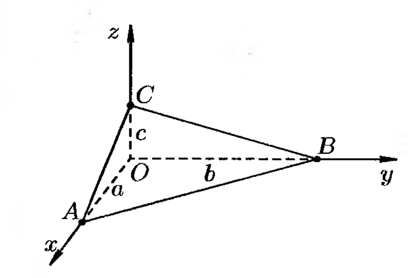
Если в уравнении (1) $A, B, C, D \neq 0$.
$Ax + By + Cz = - D$
Разделим обе части уравнения на $– D$.

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

Обозначим: $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$.
Таким образом получим уравнение:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (2) – уравнение плоскости «в отрезках».

Числа a и b и c указывают, какие отрезки отсекает плоскость на осях координат.



Задача. Записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, лежащий в искомой плоскости. Поскольку векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т. е. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Мы получили уравниение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. (3)

Его можно переписать в виде общего уравнения плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки не лежащие на одной прямой.

Задача: Даны 3 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Записать уравнение плоскости, проходящей через эти точки.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$ и составим векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ и

$\overrightarrow{M_1M} = (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$. Эти векторы компланарны, и должно выполняться условие компланарности векторов:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Получили уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки.

Угол между двумя плоскостями.

Под углом между плоскостями P_1 и P_2 понимается один из двугранных углов образуемых плоскостями.

Очевидно, что угол между плоскостями можно определить как угол между их нормальными векторами.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями:

P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$

P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

Угол найдем по формуле для угла между векторами.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Отсюда условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, а условие перпендикулярности: $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости это длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки.

Для плоскости, заданной своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ расстояние определяем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Прямая линия в пространстве.

Каноническое уравнение прямой.

Положение прямой в пространстве полностью определено, если задана какая-либо точка M_0, лежащая на прямой и вектор $\vec{q}$, параллельный этой прямой.

Определение. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой будем называть ***направляющим*** вектором данной прямой.

Задача. Требуется найти уравнение прямой проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}(m, n, p)$.

Возьмем на искомой прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ параллелен вектору $\vec{q}$. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\vec{q}(m, n, p)$, если их координаты пропорциональны, таким образом получаем

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ (1) – ***каноническое*** уравнение прямой.

Если уравнение приравнять параметру t : $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$, то получим

$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$ (2) – ***параметрическое*** уравнение прямой.

Задача. Пусть даны 2 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Составим из этих точек вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1, z_2-z_1)$. Данный вектор будет направляющим для искомой прямой. Т. е. $\vec{q}=\overrightarrow{M_1M_2}==(x_2-x_1,\ y_2-y_1, z_2-z_1)$. Из канонического уравнения прямой получим

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (3) – уравнение прямой, проходящей через данные точки.

Общее уравнение прямой.

Любую прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. То есть можно записать уравнение прямой как систему уравнений:

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ (4)

Уравнение плоскости, записанное в такой форме ***называют общим уравнением прямой.***

Общее уравнение неудобно для использования и от него можно перейти к каноническому уравнению.

Из уравнений плоскостей можно получить координаты их нормальных векторов.:

P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(A_1, B_1, C_1)$

P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(A_2, B_2, C_2)$

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, то за направляющий вектор $\vec{q}$ можно принять векторное произведение этих векторов $\vec{q}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$.

Координаты точки M_0, лежащей на прямой, можно получить из системы уравнений приняв одну из координат, например $z = 0$.

Задачи на прямую линию в пространстве.

Угол между двумя прямыми.

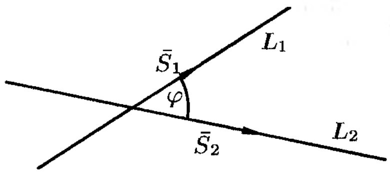
Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \Rightarrow \overrightarrow{q_1}=(m_1,\ n_1,\ p_1)$

L_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \Rightarrow \overrightarrow{q_2}=(m_2, n_2,\ p_2)$

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $\overrightarrow{q_1}=(m_1,\ n_1,\ p_1)$ и $\overrightarrow{q_2}=(m_2, n_2,\ p_2)$.

Поэтому по формуле для косинуса угла между векторами получим:



$$\cos\varphi = \frac{\vec{q_1}\cdot\vec{q_2}}{\left|\vec{q_1}\right|\cdot\left|\vec{q_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_1^2 + p_2^2}}$$

Условие параллельности прямых: $L_1 \| L_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, а условие перпендикулярности: $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

$l_1\, l_2 + m_1\, m_2\ + n_1\, n_2\ = 0.$

Угол между прямой и плоскостью.

Пусть плоскость P задана уравнением $Ax + By + Cz + D =0$, а прямая L каноническим уравнением $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Обозначим через φ – угол между плоскостью P и прямой L, а θ – угол между вектором нормали плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ и направляющим вектором прямой $\vec{q}(m, n, p)$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{q}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|}$$

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

Поэтому

$$\sin\varphi == \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если прямая L параллельна плоскости P, то векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, поэтому $Am + Bn + Cp = 0$, что является условием параллельности прямой и плоскости.

Если прямая L перпендикулярна плоскости P, то векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ параллельны, поэтому $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$, что является условием перпендикулярности прямой и плоскости.

Пересечение прямой и плоскости.

Задача. Найти точку пересечения прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D =0$.

Для решения задачи необходимо найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Это сделать легче если записать уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

И затем подставить выражения для x, y и z в уравнение плоскости.

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

Если прямая не параллельна плоскости найдем значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

Подставив которое в параметрические уравнения прямой, получим искомые координаты точки пересечения.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
Исходные понятия математического анализа.

Под математическим анализом понимают совокупность разделов математики, посвященных дифференциальному и интегральному исчислению. Дифференциальное исчисление функции одной переменной – это часть данного курса, в которой изучается дифференцирование функции и дальнейшее использование производных для исследования. Введем несколько основных понятий, которые применяются в дальнейшем при изучении всего курса математического анализа.

Основополагающим понятием курса дифференциального исчисления, а также математики вообще является понятие *множества.* Введем определение данного понятия.

Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Например: множество студентов института, множество молекул или атомов в данном теле, множество камней на дороге и т.д. Объекты, входящие в данное множество, называют ***элементами*** множества.

Множества обозначаются большими буквами A, B, …, X, Y, … их элементы маленькими буквами a, b, …, x, y, …. Принадлежность элемента x множеству A записывают, как $x \in A$, если x не входит в данное множество $x \notin A$.

Предметом изучения дифференциального исчисления являются прежде всего числовые множества. Перечислим основные из числовых множеств и их обозначения. **N** = {1, 2, 3,…} – множество натуральных чисел, **Z** = {…,-2, -1, 0, 1, 2, …} – множество целых чисел.**Q** – множество рациональных чисел, $Q = \dfrac{m}{n}$, где $m, n \in Z$, $n \neq 0$. **R** – множество действительных (или вещественных) чисел, которые включают как рациональные, так и иррациональные числа.

Понятие о переменной величине, является основным в математическом анализе.

Определение. ***Переменной величиной*** называется всякая величина x, способная принимать различные значения. Или под ***переменной величиной*** понимается такая величина, которая в процессе изучения какого – либо явления принимает хотя бы два различных значения.

Определение. Величина, которая при исследовании данного вопроса принимает только одно значение, называется ***постоянной***.

Можно также сказать, что ***постоянная величина*** – это такая переменная, все значения которой равны между собой.

Совокупность изменения всех числовых значений переменной величины называется ***областью изменения*** этой переменной. Различают следующие простейшие области изменения переменной x, называемые ***числовыми промежутками***:

1. ***открытый промежуток*** или ***интервал*** (a, b) , т. е. совокупность всех чисел, заключенных между a и b: $a < x < b$ (точки a и b исключены);

2. ***закрытый промежуток*** или ***отрезок*** $[a, b]$, то есть $a \le x \le b$ (точки a и b включены);

3. ***полуинтервалы*** $[a, b)$, то есть $a \le x < b$ и $(a, b]$, то есть $a < x \le b$.

4. ***бесконечные интервалы*** (***промежутки***).

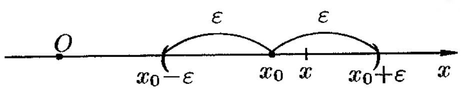
$(-\infty; b) \to x < b$, $(-\infty; b] \to x \le b$

$(a; +\infty) \to x > a$, $[a; +\infty) \to x \ge a$

$(-\infty; +\infty) \to -\infty < x < +\infty$

Определение. Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал (a, b), содержащий точку x_0.

В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε – окрестностью*** точки x_0. Если точка x попадает в ε – окрестность точки x_0, то выполняется неравенство $|x - x_0| < \varepsilon$.



Для сокращения записей в дальнейшем мы будем употреблять некоторые простейшие логические символы. Так запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из предложения α следует предложение β». Знаком $\alpha \Leftrightarrow \beta$ будем обозначать тот факт, что предложения α и β эквивалентны.

Запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α». Символ $\forall$ называется ***квантором всеобщности***.

Запись $\exists y \in B : \beta$ означает «существует элемент $y \in B$, для которого имеет место предложение β». Символ $\exists$ называется ***квантором существования***.

Функция одной переменной.

Определение 1. Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана ***функция*** (однозначная), которую записывают: $y = f(x)\ \ x \in E$.

Говорят, что y есть функция ***одной переменной*** x, заданная на E, потому что можно, как будет показано в следующих разделах курса, рассматривать функции многих переменных.

Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y - ***зависимой переменной*** или ***функцией***. Можно обозначать функцию одним из следующих символов: $y = f(x)$, $y = y(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ и т.п.

Для функции $y = f(x)$ значение $y_o = f(x_o)$, называется ***частным значением*** функции при $x = x_o$.

Функция и аргумент могут обозначаться и другими буквами, например $u = f(v)$, $S = \varphi(t)$, $r = r(\varphi)$.

Определение 2. Совокупность всех значений аргумента x, при которых функция имеет определенные действительные значения, называется ***областью определения*** или ***областью существования*** функции.

Примеры. $S = \pi R^2$ т.е. $S = f(R)\quad 0 \le R \le \infty$; $y = \sin x$, $-\infty \le x \le +\infty$; $y = \ln x$, $x > 0$.

Определение 3. Пусть задана функция $y = f(x)$ и декартова прямоугольная система координат Oxy. Множество точек на плоскости с координатами $\{x, f(x)\}$, называется ***графиком функции*** $y = f(x)$.

Способы задания функции.

1. Аналитический – функция y задана аналитически $y = f(x)$, если задано некоторое аналитическое выражение или формула, обозначающая действия, выполняемые над переменной.

Примеры: $y = x^4 - x$; $Q = \dfrac{3}{4}\pi R^3$; $z = \sqrt{2\sin 3x}$

2. Табличный – задаются числовые значения переменной x_i и соответствующие им числовые значения функции y_i, или функция задается при помощи таблицы ее значений.

x_1	x_2	x_3	x_4	…	…	…	x_i
y_1	y_2	y_3	y_4	…	…	…	y_i

Последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n ($n \in N$) по некоторому закону приведено в соответствие число $\{x_n\}$, то этим определена ***числовая последовательность*** $\{x_n\} = \{x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\}$ (или просто ***последовательность***).

Под последовательностью можно также понимать функцию, заданную на множестве натуральных чисел. $x_n = f(n)$

Число x_n – ***общий*** или ***n-ный член последовательности***.

Способы задания последовательности.

Наиболее частый способ задания последовательности формулой общего члена, которая позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру n.

Например. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = n^2 + 1$, $z_n = (-1)^n \cdot n$

Возможно также ***рекуррентное*** задание последовательности, когда следующий член последовательности задается на основании предыдущего. $x_n = f(x_{n-1})$ Так, например, можно задать арифметическую и геометрическую прогрессию.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \ge x_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называют ***монотонными*** последовательностями.

Теорема (Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Предел числовой последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для люблого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

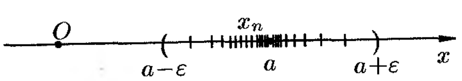
В этом случае записывают $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$(или переменная величина x) имеет предел равный числу a, или x_n стремится к a.

С помощью кванторов это определение можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Геометрический смысл предела последовательности.

Из неравенства $|x_n - a| < \varepsilon \ \to\ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, что означает, что элемент x_n находится в ε – окрестности точки a. Поэтому геометрически определение последовательности можно сформулировать: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε – окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε – окрестность точки a.



Предел функции.

Определение 1. Число A называется ***пределом функции*** f в ***точке*** $\boldsymbol{x_0}$ ($x \to x_0$), если она определена на некоторой окрестности точки x_0, за исключением быть может самой точки x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

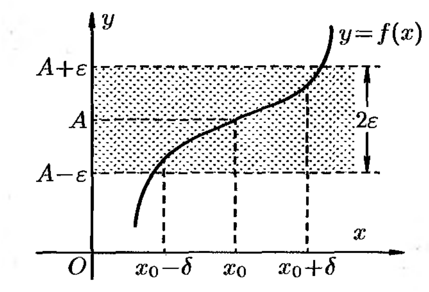
Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Короткая запись этого определения.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Геометрический смысл определения предела $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если для любой ε – окрестности точки A найдется такая δ – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ –окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε – окрестности точки A.



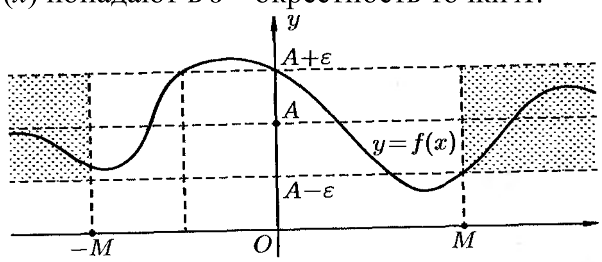
Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Короткая запись:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x : |x_0| > M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Геометрический смысл определения:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty, -M)$ или $x \in (M, +\infty,)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε – окрестность точки A.



Арифметические действия с пределами (основные теоремы о пределах).

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка теорем аналогичны для $x \to x_0$ и $x \to \infty$, поэтому формулируем теоремы только для первого случая.

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm \lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x)$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равнее той же степени предела.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

Теорема 3. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\ \left(\lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0\right)$$

Бесконечно большая и бесконечно малая величины.

Определение 1. Переменная величина $\alpha(x)$ (функция) называется ***бесконечно малой*** при $x\to x_0$ (под x_0 может быть ∞), если

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$$

Определение 2. Переменная величина $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$ (под x_0 может быть ∞), если для любого (сколь угодно большого) числа $M>0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|\beta(x)|>M$.

Можно условно сказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$, (хотя вообще говоря, это не совсем верно, так как бесконечно большая величина предела не имеет), при этом, если начиная с некоторого момента все значения величины принимают только положительные значения то говорят величина стремится к $+\infty$ ($\to+\infty$) , а если отрицательные то $\to -\infty$.

Важные свойства бесконечно большой и бесконечно малой величин.

Теорема 1. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}\right)=0$

Теорема 2. Частное от деления функции, имеющей отличный от нуля предел, на бесконечно малую величину, есть бесконечно большая величина.

Т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{\alpha(x)}\right)=\infty$

В случае когда и числитель, и знаменатель являются бесконечно малыми или бесконечно большими величинами результат деления заранее неизвестен и мы имеем дело с ***неопределенными выражениями***.

Примеры. 1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

$y_n = \frac{2n+1}{n^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0$.

x_n и y_n – бесконечно малые величины.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n}{n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2n+1}{n} = 2$$

2. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

$y_n = \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0$.

x_n и y_n – бесконечно малые величины.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{x\to\infty} n = \infty$$

3. Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

$y_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = 0$.

x_n и y_n – бесконечно малые величины.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}(-1)^n$$

Эта величина предела не имеет.

Раскрытие неопределенных выражений (неопределенностей).

Определение. Дробь, у которой и числитель и знаменатель – переменные величины стремящиеся к нулю, называется неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Кроме неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ существуют неопределенности вида:

$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{∞}.

1. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданная отношением двух многочленов.

Чтобы раскрыть такую неопределенность надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую степень x, входящую в них (вынести за скобки x в наивысшей степени).

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+2}{4x^2+9x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{11}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{11}{x^3}}=\infty$$

2. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданная отношением двух многочленов.

Чтобы раскрыть неопределенность такого вида, заданную в форме $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ надо в числителе и знаменателе выделить критический множитель ($x-x_0$) и сократить дробь на него.

Замечания: а) Критический множитель это множитель равный нулю при предельном значении x. Он обязательно выделяется и в числителе и в знаменателе, так как $x = x_0$ является корнем обоих многочленов, а потому эти многочлены на основании следствия теоремы Безу делятся на $x - x_0$ без остатка.

б) Возможно, что операцию сокращения на критический множитель придется проделать несколько раз.

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{3}$$

3. Неопределенность $\frac{0}{0}$, заданная иррациональными выражениями.

Данный случай раскрытия неопределенности сводится к предыдущему случаю после преобразований, которые позволяют избавиться от иррациональности.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{8x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt[3]{8x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{\left(\sqrt[3]{8x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\left(\sqrt[3]{8x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{8x}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{8x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{8x}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+4\right)\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{8x}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+4\right)}{(8x-8)\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\left(\sqrt[3]{8x}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(\left(\sqrt[3]{8x}\right)^2+2\cdot\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)}=\frac{3}{4}$$

Первый замечательный предел. Тригонометрические неопределенности.

При вычислении пределов функций, которые содержат тригонометрические выражения часто используют предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Это ***первый замечательный предел***.

На основании формулы первого замечательного предела легко доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1.$$

Пример. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=$

Положим $ax=\alpha$, отсюда $x=\frac{\alpha}{a}$. Если $x\to 0$, то при $\alpha\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{a}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{a\sin\alpha}{\alpha}=a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=a\cdot 1=a$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\frac{3}{5}$

Второй замечательный предел.

Рассмотрим последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ее значения $x_1=2$, $x_2=2{,}25$, $x_3=2{,}370$, $x_4=2{,}441$, $x_5=2{,}488$. Мы видим, что последовательность *возрастающая*, т.е. *монотонная*. Если мы найдем ее дальнейшие значения, то $x_{10}=2{,}594$, $x_{100}=2{,}705$, $x_{1000}=2{,}717$, $x_{10000}=2{,}\ 718$. Очевидно, что для $n\ \geq 5$, $x_n<\ 3$. Таким образом последовамтельность *ограничена*.

Так как переменная $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена, то она имеет конечный предел (на основании теоремы Вейерштрасса), то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Предел переменной $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ называется *числом е*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Число *е* – иррациональное. Можно показать, что *е* = 2,718281828459…, но можно использовать приближение *е* = 2, 72.

Можно доказать, что к числу *е* будет стремиться функция $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Если в равенстве положить $\frac{1}{x}=\alpha$ ($\alpha\to 0$ при $x\to\infty$), оно запишется в виде

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Эти равенства называются ***вторым замечательным пределом***.

Они используются при раскрытии неопределенностей вида 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{∞}.

Следствия из формулы второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x} = 1.$$

Односторонние пределы функции.

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремиться к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим чем x_0 (справа от x_0) или колеблясь около точки, x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Определение. Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуетс число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A_1| < \varepsilon$.

Предел слева обозначают: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$.

Аналогично определяется ***предел функции справа***. Его мы запишем с помощью символов:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall x : x \in (x_0,\ x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-A_2| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Теорема (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

Если существуют оба предела и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Если же $A_1 \neq A_2$, то предела не существует.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 4^{\frac{1}{2-x}}$

Для того чтобы найти предел при $x\to 2$ справа будем находить значения функции при $x > 2$, постепенно приближаясь к аргументу 2, то есть, например при $x = 2{,}5$, $x = 2{,}1$, $x = 2{,}01$, $x = 2{,}001$. Запишем соответсвенные значения функции в таблицу.

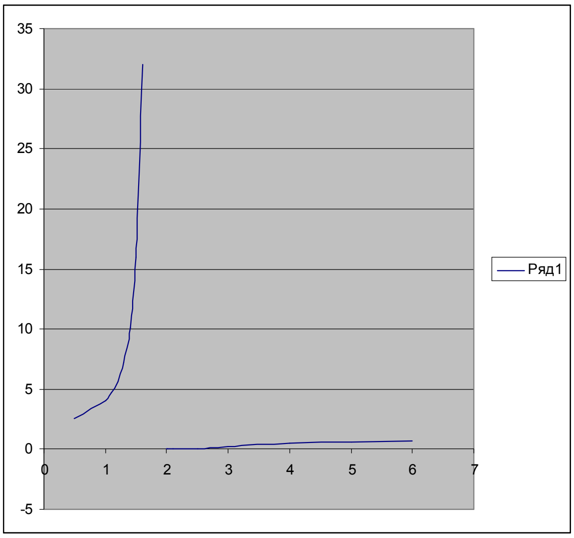
x	2,5	2,1	2,01	2,001
$4^{\frac{1}{2-x}}$	0,0625	9,53674E-07	6,22E-61	0

Мы видим, что функция имеет предел справа $\lim\limits_{x\to 2+0} 4^{\frac{1}{2-x}} = 0$.

Теперь проделаем те же действия слева.

x		1,5	1,9	1,99	1,995
$4^{\frac{1}{2-x}}$		16	1048576	1,61E+60	2,6E+120

Также очевидно, что данная функция предела не имеет, но можно записать $\lim\limits_{x\to 2-0} 4^{\frac{1}{2-x}} = +\infty$



Под окрестностью символа - ∞ понимается любой интервал (- ∞, a), а под окрестностью символа + ∞ любой интервал (b, + ∞)

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctg(x)$

При $x\to +\infty$.

x	10	100	1000	10000	100000
$arctg(x)$	1,471128	1,560797	1,569796	1,570696	1,570786

То есть $\lim\limits_{x\to +\infty} arctg(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

x	-10	-100	-1000	-10000	-100000
$arctg(x)$	-1,471128	-1,560797	-1,569796	-1,570696	-1,570786

$$\lim_{x\to -\infty} arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Непрерывность функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (1).

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

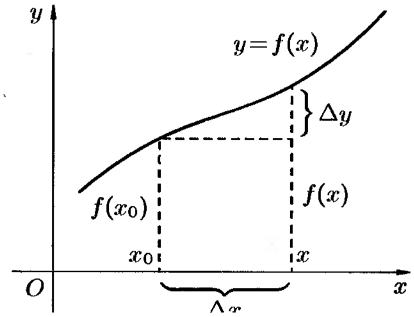
1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть выполняется равенство (1).

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции. То есть в функции $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Еще одно определение непрерывности функции можно дать, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;\ b)$. Для любого $x \in (a;\ b)$ разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx. $\Delta x = x - x_0$. $x = \Delta x + x_0$.

Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy (или Δf, или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Очевидно, что приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Перепишем равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ используя обозначения приращений.

$x \to x_0$ можно переписать как $x - x_0 \to 0$, т.е. $\Delta x \to 0$.

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (2).

То есть функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство (2), т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в интервале и в точке она непрерывна справа (т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$), а в точке непрерывна слева (т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$).

Теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю).

Теорема 2. Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ оси Ox, то обратная функция $x = \varphi(y)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$ оси Oy.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

То есть существуют точки $\alpha \in [a,\ b]$ и $\beta \in [a,\ b]$, такие что $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ $\forall x \in [a,\ b]$.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.

То есть $\exists M > 0$, такое, что $|f(x) < M|, \forall x \in [a,\ b]$.

Теорема 2. (о промежуточном значении) (Больцано – Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $A = f(a)$, а $B = f(b)$- значения функции на концах отрезка, то $\forall C:\quad A < C < B$ существует такое значение аргумента x^*, что $f(x^*) = C$.

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;\ b]$ найдется хотя бы одна точка c такая, в ней функция $f(x)$ обращается в ноль $f(c) = 0$.

Производная функции.

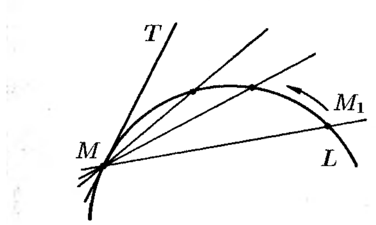
Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

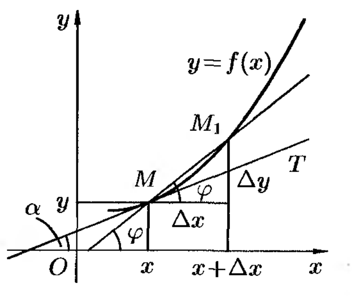
Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о касательной.

Возьмем точки M и M_1, лежащие на непрерывной кривой L. Прямую, проходящую через эти точки, называют ***секущей***. Если точка M_1 будет двигаться по кривой по направлению к M, то секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Определение. ***Касательной к данной кривой в данной точке M*** называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.





Задача. Зная уравнение непрерывной линии $y = f(x)$ найти уравнение касательной в данной ее точке.

Рассмотрим график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в точке $M(x,\ y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = tg\ \alpha$, где α – угол касательной с осью Ox.

Для этого возьмем на кривой точку M_1 с абсциссой $x+\Delta x$ и проведем секущую MM_1. φ – угол наклона секущей. Очевидно, что угловой коэффициент секущей

$$k_{сек} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Устремим точку M_1 к точке M. То есть $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ $\Delta y \to 0$ и точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая стремится к своему предельному положению *касательной МТ*. При этом $\varphi \to \alpha$, и если касательная не перпендикулярна оси Ox, то в силу непрерывности tgx $tg\,\varphi \to tg\,\alpha$. Таким образом получим угловой коэффициент касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Предел, стоящий в правой части равенства называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $f'_x(x)$, y'_x.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таким образом, мы получили, что угловой коэффициент касательной равен значению ее производной в точке касания.

$$k = tg\alpha = y'$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

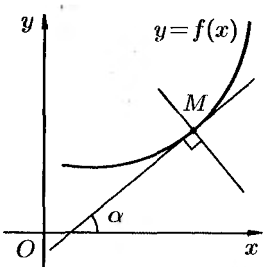
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$ называется ***дифференцируемой*** в этом интервале, а операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть ***скорость протекания этого процесса***. В этом состоит ***физический смысл производной***.

Вернемся к задаче о касательной. Мы нашли, что угловой коэффициент равен $k = tg\alpha = y'$, то есть $f'(x) = tg\alpha = k$, то есть производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке абсцисса которой равна x. В этом заключается ***геометрический смысл производной***.



Пусть точка касания M имеет координаты (x_0, y_0), тогда ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$. Так как касательная пройдет через точку касания M, используем уравнение (из аналитической геометрии) $y - y_0 = k(x - x_0)$ и перепишем его в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Это ***уравнение касательной***.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой***.

Так как нормаль перпендикулярна касательной используем условие перпендикулярности для нахождения ее углового коэффициента.

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0.$$

Основные правила дифференцирования функций.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

Доказательство:

$$y = u \cdot v$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \to \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v - uv$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} \Rightarrow (uv)' = vu' + uv'$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$y' = (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

3. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v'(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v'(x) \neq 0$.

Производная сложной и обратной функций.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимой переменной x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u_x' в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y_u' в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y_x' в точке x, которая находится по формуле $y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

То есть для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимой переменной***.

Это остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Правило. Если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над переменной x, то за промежуточный аргумент следует принять результат всех этих действий кроме последнего.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x_y' = \frac{1}{y_x'}$.

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции***

Таблица производных.

Все выведенные правила дифференцирования элементарных функций запишем в виде таблицы. Поскольку на практике чаще приходится находить производные от сложных функций в таблице формул аргументом является промежуточный аргумент *u*.

1. $(C)' = 0$;
2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, частный случай $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, частный случай $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, частный случай $(\log u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $(shu)' = chu \cdot u'$;
14. $(chu)' = shu \cdot u'$;
15. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;
16. $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций.

Особые случаи дифференцирования.

Логарифмическое дифференцирование.

В некоторых случаях перед вычислением производной полезно *предварительное логарифмирование*. Таким образом, например, можно продифференцировать степенно-показательную функцию $y = u^v$, где $u(x)$ и $v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x.

Найдем производную этой функции. Сначала логарифмируем функцию.

$$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow$$

$$y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right) \Rightarrow y' = u^v\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right)$$

Получаем формулу дифференцирования:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

Формула достаточно сложна для запоминания, поэтому можно дифференцировать такие функции по указанной схеме.

Примеры. 1. $y = (\sin x)^{arctgx}$

$$\ln y = \ln(\sin x)^{arctgx} = arctgx \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (actgx)'\cdot ln(\sin x) + (ln(\sin x))'\cdot arctgx = \frac{1}{1+x^2}\cdot ln(\sin x) +$$

$$+\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x\cdot arctgx = \frac{ln(\sin x)}{1+x^2} + ctgx\cdot arctgx$$

$$y' = (\sin x)^{arctgx}\left(\frac{ln(\sin x)}{1+x^2} + ctgx\cdot arctgx\right)$$

2. В некоторых случаях логарифмическое дифференцирование применяют, хотя можно найти производную с помощью формул дифференцирования. Это делает дифференцирование менее громоздким.

$$y = \frac{(2x+1)^2\cdot\sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}$$

$$ln\, y = ln\left(\frac{(2x+1)^2\cdot\sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}\right) = ln(2x+1)^2 + ln\left(\sqrt[5]{x^2-3}\right) - ln(5x-7)^3 =$$

$$= 2\,ln(2x+1) + \frac{1}{5}ln\left(x^2-3\right) - 3\,ln(5x-7)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2-3} - 3\frac{5}{5x-7}$$

$$y' = \frac{(2x+1)^2\cdot\sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}\cdot\left(\frac{4}{2x+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2-3} - \frac{15}{5x-7}\right)$$

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от х и называется ***производной первого порядка.***

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' (или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$).

Аналогично можно определить производные третьего порядка.

$y''' = (y'')'$.

Производной n – ного порядка (или n – ной производной) называется производная от производной $n-1$ порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные порядка выше первого называется производными высших порядков. Обозначение: начиная с производной четвертого порядка римскими цифрами или числами в скобках.

Например: y^{IV}, $y^{(5)}$ - производные четвертого и пятого порядков.

Дифференциал функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение ее производной на приращение независимой переменной.

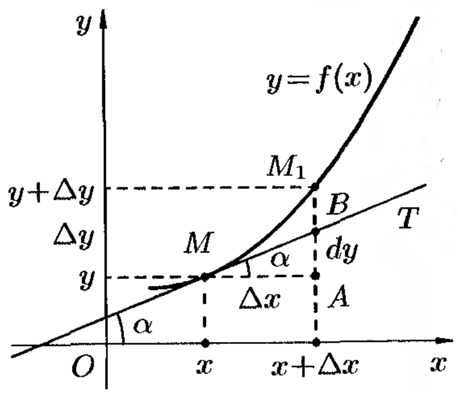
$dy = f'(x)\,\Delta x$.

При $f(x) = x$ получим $f'(x) = 1$ и $dx = \Delta x$. То есть ***дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной***.

Поэтому записывают

$dy = f'(x)\,dx$.

Геометрический смысл дифференциала.



Проведем касательную MT к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем ординату B касательной в точке $x + \Delta x$. Из прямоугольного треугольника MAB: $tg\alpha = \dfrac{|AB|}{\Delta x}$, т.е. $|AB| = tg\alpha \cdot \Delta x$. На основании геометрического смысла производной $tg\alpha = f'(x)$, поэтому $|AB| = f'(x)\cdot \Delta x$ или $|AB| = dy$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

На рисунке отрезки AM_1 и AB изображают соответственно приращение функции Δy и дифференциал dy. Найдем разницу между Δy и dy.

Так как $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то можно записать

$y' - \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть α – бесконечно малая величина.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \quad \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Учитывая, что $\Delta x = dx$ запишем $\Delta y = y' \cdot dx + \alpha \cdot \Delta x = dy + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции представляет собой сумму двух слагаемых дифференциала функции и $\alpha\Delta x$. Второе слагаемое есть бесконечно малая величина.

Поэтому часто дифференциал функции называют ***главной частью приращения функции.***

$\Delta y = dy + p$

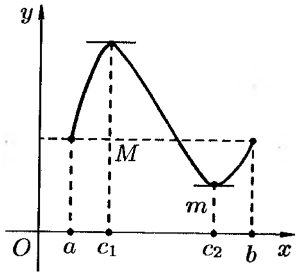
Т. е. истинное приращение функции с большой степенью точности можно заменить ее дифференциалом.

$\Delta y \approx dy$

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.



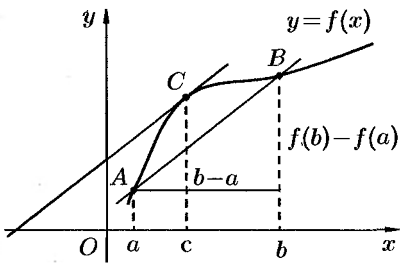
Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Эту формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении.***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Данная формула имеет простой геометрический смысл. Величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ это угловой коэффициент секущей АВ, а $f'(c)$- угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке c. Следовательно, на графике функции $y=f(x)$ найдется такая точка $C(c, f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.



Следствие из теоремы Лагранжа. (Признак постоянства функции). Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывнs на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируемs на интервале $(a;\ b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши.

Правило Лопиталя. (Раскрытие неопределенностей.)

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A, \text{ то } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Исследование функций при помощи производных.

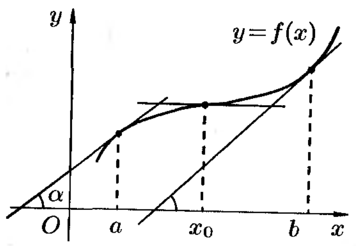
Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. (необходимый признак). Если дифференцируемая на интервале (a; b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство:

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a; b). Возьмем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на интервале (a; b) и рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Функция $f(x)$ возрастает,



поэтому если $\Delta x > 0$ то $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$. Если $\Delta x < 0$ то $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x, следовательно

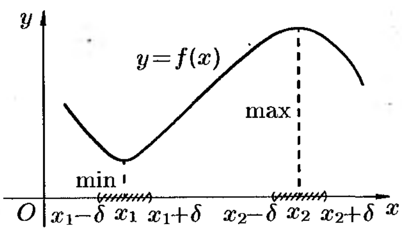
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Аналогично можно рассмотреть случай функции $f(x)$, убывающей на интервале (a; b).

Геометрически это означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox.

Теорема. (достаточный признак). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a; b) и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a; b).

Экстремум функции.



Определение. Точка называется x_0 ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично, x_0 - ***точка минимума*** функции, если $\exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции.

Понятие экстремума связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во *внутренних точках* области определения.

Теорема. (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Обратная теорема неверна: то есть если $f'(x_0) = 0$, то это не значит что x_0 - точка экстремума.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Поэтому, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими.***

Теорема. (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ – окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Схема исследования функции на экстремум:

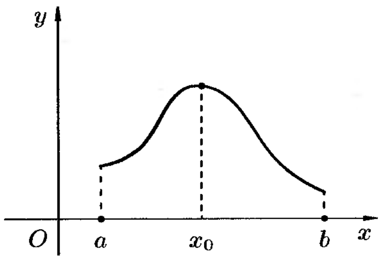
1. Найти критические точки функции $y = f(x)$.
2. Выбрать те точки, которые являются внутренними точками области определения функции.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки.
4. Определить точки экстремума в соответствии с достаточным условием и вычислить значения функции в них.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак сущесвования экстремума, основанный на определении второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум при $f''(x_0) > 0$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Нам известно, что такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т.е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a, b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.

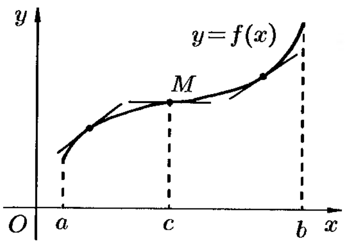


Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a; b].

1. Найти критические точки функции на интервале $(a; b)$.
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$.
3. Выбрать из всех чисел наибольшее и наименьшее значения.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Левее точки M касательные, проведенные к графику функции, находятся выше графика функции. Говорят, что в таком случае график является выпуклым вверх (выпуклым). Правее точки M все наоборот. Касательные лежат ниже графика функции и здесь график обращен выпуклостью вниз, то есть является вогнутым.



Определение. График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вниз*** (***выпуклым***)на интервале $(a; b)$, если $\forall x \in (a, b)$ соответствующая часть кривой расположена выше касательной и ***выпуклым вверх*** (***вогнутым***), если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке.

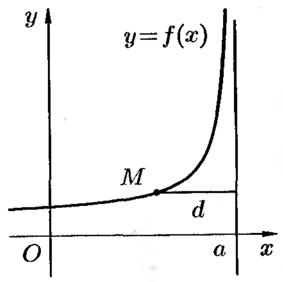
Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

Заметим, что угловой коэффициент касательных на участке (a, c) уменьшается, что означает что функция y' – убывающая, и , следовательно, $y'' < 0$, аналогично на участке (c, b) y' возрастает, и $y'' > 0$. То есть для исследования интервалов выпуклости и вогнутости будем использовать вторую производную.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$ – график выпуклый вниз.

Теорема. (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции.



При исследовании функции для построения ее графика необходимо знать его асимптоты. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремиться к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Определение. Говорят, что прямая является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты записывается в виде $y = kx + b$.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ *наклонную* асимптоту необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$ и тогда прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

Общая схема исследования функции и построение графика.

1. Найти область определения функции. Если функция имеет точки разрыва, определить их вид с помощью односторонних пределов. Определить вертикальные асимптоты.
2. Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (решив неравенства $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции.

Пример. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$

1. Область определения: $x \in (-\infty; 4) \cup (4 : +\infty)$. Функция не определена в точке $x = 4$. Исследуем ее на разрыв.

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=-\infty \quad \lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=+\infty$$

Таким образом $x = 4$ – вертикальная асимптота.

2. Пересечение с осью Ox: Решаем уравнение $\frac{(x+3)^2}{x-4}=0$, $x = -3$.

Пересечение с осью Оу: При $x = 0$ $y = -9/4$.

3. $\frac{(x+3)^2}{x-4}>0$ при $x\in(4:+\infty)$, $\frac{(x+3)^2}{x-4}<0$ при $x\in(-\infty;4)$.

4. Функция общего вида.

5. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+3)^2}{x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{(x-4)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{0}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{10x+9}{x-4}\right)=10$$

Наклонная асимптота: $y = x + 10$.

6. Возрастание и убывание.

$$y'=\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}\right)'=\frac{2(x+3)\cdot(x-4)-1\cdot(x+3)^2}{(x-4)^2}=\frac{(x+3)(2x-8-x-3)}{(x-4)^2}=\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}$$

$$y'=\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}=0$$

Критические точки $x = -3$, $x = 11$.

x	(-∞, -3)	-3	(-3, 4)	4	(4, 11)	11	(11, +∞)
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	возрастает	0	убывает	-	убывает	28	возрастает

7. Экстремумы в точках $x = -3$ – максимум, $x = 11$ – минимум.

8. Выпуклость и вогнутость.

$$y''=\left(\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}\right)''=\left(\frac{(x^2-8x-33)}{(x-4)^2}\right)''=\frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2-2(x-4)\cdot(x^2-8x-33)}{(x-4)^4}=$$

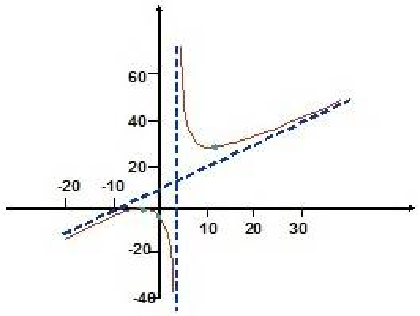
$$=\frac{(x-4)(2x^2-16x+32-2x^2+16x+66)}{(x-4)^4}=\frac{98}{(x-4)^3}$$

$$y''=\frac{98}{(x-4)^3}=0$$

Нет критических точек второго порядка.

x	(-∞, 4)	4	(4, +∞)
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	вогнута	-	выпукла

Теперь можно нарисовать график:


60
40
20
-20
-40
-20
-10
10
20
30