§1. Основные понятия теории вероятностей.

В основе научных знаний лежит наблюдение. Для проведения наблюдений ставятся эксперименты, которые естественным образом делятся на два класса. В случае, если результаты экспериментов заранее предсказуемы, исходя из естественнонаучных законов, мы имеем дело с классом детерминированных экспериментов. Другой класс – случайных или вероятностных экспериментов – характеризуется тем, что при исполнении одних и тех же условий возможно наступление исключающих друг друга событий. Содержанием теории вероятностей является теоретический анализ таких экспериментов.

Хотелось бы особенно подчеркнуть необходимость для инженеров знаний по теории вероятностей – не столько обширных и глубоких, сколько неформальных, действенных, наличие привычки к оперированию со статистическими данными и вероятностными представлениями. Особые требования именно к этой области математических знаний объясняются тем, что большинство явлений происходит в условиях неполной определенности, и их ход и исход зависят от случайных факторов. К сожалению, в широких кругах специалистов – инженеров, биологов, медиков, химиков – хорошее владение теорией вероятностей встречается редко. Ее положения и правила часто применяются формально, без подлинного понимания их смысла и духа. Нередко на теорию вероятностей смотрят как на некое подобие «волшебной палочки», позволяющее получить информацию «из ничего», из полного незнания. Это заблуждение: теория вероятностей позволяет только преобразовывать информацию, то есть из сведений об одних явлениях, доступных наблюдению, делать выводы о других, недоступных.

Следует также сказать, что не всякая неопределенность есть случайность. Под термином «случайное явление» в теории вероятностей принято пронимать явление, относящееся к классу повторяемых и, главное, обладающее свойством **статистической устойчивости**. При повторении однородных опытов, исход которых случаен, их средние характеристики проявляют тенденцию к устойчивости, стабилизируются. Частоты событий приближаются к их вероятностям, средние арифметические – к математическим ожиданиям.

В каждой математической дисциплине есть свои основные понятия, связанные с предметом изучения. Приведем примеры тех явлений, которые могут являться предметом изучения теории вероятностей и которые подведут нас к некоторым важным определениям.

При неоднократном воспроизведении одного и того же действия результаты могут изменяться от случая к случаю. Так при подбрасывании монеты может оказаться, что она упадет либо «гербом» либо «решкой» вверх. При бросании игрального кубика может выпасть число от 1 до 6. Из большого количества произведенных изделий можно выбрать одно и оно может оказаться первосортным или бракованным. Купленный билет лотереи может быть выигрышным или нет.

Опытом или ***испытанием*** называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Предполагается, что комплекс условий, в результате которого наступает определенное событие, может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз, то есть имеется возможность проводить неоднократное испытание в неизменных условиях. Естественно можно говорить о некотором приближенном равенстве условий.

<u>Определение 1.</u> Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Результат испытания, который нельзя заранее спрогнозировать называется ***случайным событием***.

В жизни понятие случайного события связано с вероятностью: одно менее вероятно, другое более вероятно. Говоря так, мы руководствуемся здравым смыслом. Некоторые события наступают почти наверняка или наоборот крайне редко. Таким образом, даже из житейских соображений можно понять предельные случаи: достоверное или невозможное события.

Определение 2. Событие называется ***достоверным*** в данном испытании, если оно неизбежно происходит при этом испытании.

Определение 3. Событие ***невозможным*** в данном испытании, ели оно заведомо не происходит в этом испытании.

Примеры: Кит – млекопитающее – достоверное событие; встреча на улице марсианина или динозавра – невозможное событие.

Каждому произвольному событию A ставится в соответствие некоторое число $p(A)$. (Здесь P – первая буква французского слова *probabilité* – вероятность). ***Вероятность события*** – это численная мера объективной возможности его появления. Очевидно, если A - достоверное событие то $p(A)=1$, а если невозможное, то $p(A)=0$, то есть $0 \le p(A) \le 1$. Наука, изучающая закономерности случайных событий это ***теория вероятности***.

Определение 4. два события A и B называются ***несовместными***, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

Например, выпадение «орла» или «решки» при бросании монеты – несовместные события.

Определение 5. События A и B называются ***совместными***, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

Пример: События студентка – блондинка, студентка – старше 18 лет, студентка не сдала экзамен, могут появиться одновременно.

Определение 6. Два события A и $\overline{A}$ называют ***противоположными*** или взаимно дополнительными, если появление одного из них равносильно не появлению другого.

Пример: промах – попадание в мишень – противоположные события.

Рассмотрим опыт: бросание монеты. Он имеет 2 взаимно исключающих исхода: выпал герб, выпала решка. Мы не можем учесть все условия бросания, поэтому исход является случайным, однако каждый ответит, что вероятность любого исхода равна ½.

Если мы рассматриваем опыт с конечным числом взаимно исключающих исходов, которые равноправны по отношению к условиям данного опыта, то есть равновероятны, то обозначив как А – некоторое событие мы можем определить вероятность $p(A)$ этого события как долю тех исходов, в результате которых это событие осуществляется:

$p(A)=\dfrac{N(A)}{N}$, (1) где N - общее число исходов, $N(A)$ - число исходов, приводящих к наступлению события А.

Пример: для бросания монеты $N(A)=1$, $N=2$, $p(A)=1/2$;

Для бросания игрального кубика $N(A)=1$, $N=6$, $p(A)=1/6$ -

Отметим сразу, что, несмотря на внешнюю простоту формулы (1), применение ее при рассмотрении каждого конкретного опыта, явления ставит перед наблюдателем дополнительную задачу по выявлению тех равновероятностных исходов, с которыми связано то или иное событие А.

Существуют три принципа задания вероятности: *классический, статистический* и *геометрический*. Начнем с самого простого статистического определения.

Накопленные практикой многочисленные наблюдения выявили замечательную закономерность: а именно, предположим, что опыт может быть воспроизведен многократно, в каждом из опытов может произойти или не произойти событие А. Пусть n - общее число всех опытов, $n(A)$ - число опытов в которых наступило событие А. Отношение $\frac{n(A)}{n}$ называют ***относительной частотой*** или ***частотой***. Оказывается в различных сериях испытаний соответствующие частоты $\frac{n(A)}{n}$ при больших n практически совпадают, группируясь, около некоторого постоянного значения $p(A)$, называемого вероятностью А. $p(A) \approx \frac{n(A)}{n}$. Формально указанное отношение нужно .понимать следующим образом:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Данное определение вероятности называется ***статистическим.***

Применимость вышеуказанной формулы была доказана Я.Бернулли. Позднее мы подробнее рассмотрим этот вопрос. Экспериментально данный закон был проверен разными исследователями в сериях опытов из 10000, 12000, 24000 бросков монеты (Керрих, Бюффон, Пирсон), и во всех опытах частоты выпадения «герба» очень мало отличалась от ½. Например, в серии из 1000 бросков, число выпадения «герба» было 501, 485, 509 для разных серий испытаний.

При подсчете вероятности большую пользу оказывают комбинаторные формулы.

1.1 Основные формулы комбинаторики.

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

Определение 1. Множества элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только из порядком называются ***перестановками*** элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot n$$

Для пустого множества принято соглашение, что оно может быть упорядочено только одним способом, то есть $0! = 1$.

Пример 1. Дежурства 6 человек может быть установлено 6! способами. 5 человек на скамейке могут расположиться 5! способами.

Определение 2. ***Сочетаниями*** из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n по m обозначают C_n^m. Это число можно найти по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Определение 3. ***Размещениями*** называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \quad (n-m+1).$$

Число перестановок, размещений и сочетаний связано формулой

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Замечание. Во всех выше приведенных формулах предполагается, что все элементы разные. Если некоторые элементы в множествах повторяются, то расчет проводят по усложненным формулам, которые мы здесь не приводим.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать 3-х студентов на три различные должности из 10 кандидатов?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Сколькими способами можно распределить 3 разные путевки на 5 человек?

$$A_{15}^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать 3 делегата на конференцию из 10 человек?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{6} = 120$$

Сколькими способами можно распределить 3 одинаковых путевок на 5 человек?

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 2} = \frac{60}{12} = 5$$

Еще 2 простых правила:

Правило сложения (суммы). Если некоторый объект А может быть выбран из множества объектов m способами , а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо объект А либо В можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример 4. Из 25 студентов 10 девушек. На соревнования отправляют 3-х юношей и 2 девушки. Сколько команд можно сформировать?

Число способов выбрать 3-х юношей из 15 - C_{15}^3, число способов выбрать 2-х девушек из 10 - C_{10}^2. По правилу произведения общее число команд - $C_{15}^3 \cdot C_{10}^2$.

1.2 Пространство элементарных событий. Классическое определение вероятности.

Рассмотрим следующий опыт: бросание кубика с 6 гранями.

Возможны следующие события:

1.Выпало 1, 2, … 6 очков. (Обозначим соответствующие события A_1, A_2, …, A_6.)

2. Выпало четное число очков (В)

3. Выпало нечетное число очков (С)

4. Выпало число очков большее 4. (D)

5. Выпало число очков, которое делится на 3 (Е)

6. Выпало число очков меньше или равное 4 (К).

Некоторые из названных событий не исключают одно другого. Рассмотрим три группы событий: A_1, A_2, …, A_6 , В и С, Е и К. Так появление одного из событий одновременно исключает появление любого другого события этой группы событий. То есть в результате опыта может появиться только одно единственное событие из этой группы. Они – несовместны. Во-вторых, в результате опыта обязательно произойдет одно из событий, принадлежащих к рассматриваемой группе.

Определение. Множество событий называют ***полной группой событий***, если они попарно несовместны; появление одно и только одного события является достоверным событием.

Все вышеперечисленные группы событий являются полными.

События считают ***равновозможными*** (***равновероятными***), если нет оснований предполагать, что одно событие более вероятно, чем другое.

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется ***элементарным исходом,*** (***элементарным событием***). (Сразу хочется предупредить, что термин ***элементарное событие*** является таким же не определяемым в теории вероятности, как такие понятия как ***точка***, ***прямая*** в геометрии.) Элементарными событиями для рассматриваемого опыта будут только события A_1, A_2, …, A_6. Любое другое событие будет комбинацией указанных элементарных событий, то есть не будет элементарным.

Можно указать несколько свойств элементарных исходов, которые помогут отличить их от комбинированных событий.

1. Каждый исход испытания представлен только одним из элементарных исходов.
2. Всякое событие А, связанное с испытанием, состоит из множества нескольких элементарных событий. (Например выпадение нечетного числа очков будет связано с наступлением элементарных событий A_1, A_3, A_5.)
3. Событие А происходит только тогда, когда реализуется один из элементарных исходов входящих в множество А.

Введем общее определение, используя язык множеств.

Пусть P^*- конечное множество из n элементов P_1^*, P_2^*, …, P_n^* (Например элементы – точки на плоскости.) Опыт состоит в выборе единственного элемента из данного множества. То есть событие P_i состоит в выборе элемента P_i^*. Все события считаем равновероятными. События $P_1, P_2, ..., P_n$ - элементарные. Можно считать данное множество ***пространством элементарных событий***. Понятно, что в данном опыте можно говорить и о других (неэлементарных) событиях. Например, рассмотрим подмножество A^* множества P^*. Это подмножество задает случайное событие А, которое состоит в том, что в результате опыта будет выбран элемент подмножества A^*. Таким образом каждое подмножество A^* задает случайное событие А. Подмножество A^* состоит из тех точек P_j^* множества P^* выбор которых будет означать наступление события А. Такие точки (элементарные события) будут называться ***благоприятствующие наступлению события А***. Невозможному событию при таком рассмотрении будет соответствовать пустое множество, а достоверному - само множество P^*. Удобно использовать наглядную иллюстрацию в виде диаграмм Эйлера. (Рис.1)

Пусть дано событие А, то есть задано подмножество событий A^*, благоприятствующих наступлению данного события. m - число элементов подмножества A^*. Положим $p(A)=\dfrac{m}{n}$.(2) Данная формула сопоставляет каждому событию А в рассматриваемом испытании число $p(A)$, называемое ***вероятностью*** события А. Таким образом вероятность события А равна отношению количества m элементарных событий благоприятствующих событию А, к общему количеству n событий в пространстве элементарных событий. Очевидно, что если А – невозможное событие, то $p(A)=\frac{0}{n}=0$, если А – достоверное событие, то $p(A)=\frac{n}{n}=1$. Вероятность каждого элементарного события P_i равна $p(P_i)=\frac{1}{n}$.

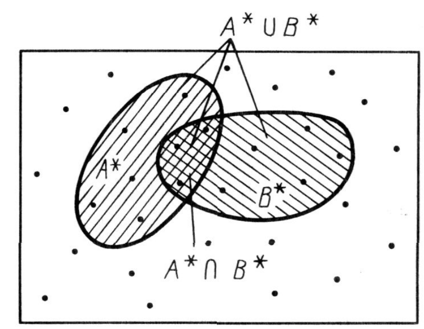

Рис.1.

Формула (2) дает ***классическое определение вероятности события.***

Примеры. 1. В испытании, заключающемся в однократном бросании монеты, пространство элементарных событий состоит из двух элементов. P_1 - «орел», P_2 - «решка». Поэтому вероятность выпадения и «орла» и «решки» одинакова и равна ½.

2. В испытании, связанном с бросанием игральной кости, пространство элементарных событий состоит из шести элементов: - 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность того, что в результате опыта выпадет количество очков, большее 2-х, равна 2/3, так как этому благоприятствуют 4 элементарных события: 3, 4, 5, 6, и по формуле $p=4/6=2/3$.

3. При игре в Спортлото (6 из 49) элементарным событием является комбинация из 6 чисел выбранных из множества чисел с 1 по 49 включительно. Используя комбинаторику можно вычислить, что таких комбинаций 8145060. То есть вероятность угадать одну комбинацию из всех равна 0, 000000123.

Предупреждение! Рассматривая определения ***полной группы событий*** и ***пространства элементарных событий*** можно прийти к выводу, что они имеют довольно нечеткие очертания и во многом похожи, что при определении вероятности может привести к ошибкам. Очень важно понять, что все события пространства элементарных событий образуют полную группу. Но не любая полная группа является пространством элементарных событий. Поясним данное утверждение.

Например, любое событие и противоположное ему событие образуют полную группу. Как события: попадание в мишень – промах. Однако они, не образуют пространства элементарных событий, поскольку у этих события могут быть разные вероятности. А если предположить, что эти события образуют пространство элементарных событий, то какова вероятность каждого из них? Естественно ½.

Таким образом, мы заметили, что помимо того, что элементарные события образуют полную группу попарно – несовместных событий, они еще должны быть ***равновероятными***. Если пренебречь этим простым требованием, то можно получить множество ошибок, некоторые из которых даже вошли в историю развития математики.

Ошибка Даламбера. На вопрос о том, сколько раз выпадет комбинация «орел» + «решка» при одновременном выбрасывании 2-х монет, он ответил, что 1/3, полагая, что элементарными исходами для данного опыта будут: О-О, Р-Р, О-Р. На самом деле исход О-Р может быть получен как О-Р и Р-О, то есть указанные события не являются равновозможными. Правильный ответ: ½.

Парадокс де Мере. Данный ученый полагал, что при бросании 2-х игральных костей (кубиков) выпадение 11 и 12 очков равновероятно. На самом деле выпадение 11 очков более вероятно, чем выпадение 12. Проверить это утверждение я предлагаю самостоятельно.

1.3 Операции над событиями.

Мы отметили взаимно однозначное соответствие между событиями и подмножествами в пространстве P^* элементарных событий. Для любых двух подмножеств A^* и B^* множества P^* определены подмножества $A^* \quad B^*$ (объединение A^* и B^*) и $A^* \quad B^*$ (пересечение A^* и B^*). Рассматривают также дополнение подмножества A^* в P^*, обозначаемое как $\overline{A}^*$: дополнение состоит из тех точек, которые не принадлежат множеству A^*. Операциям и соответствуют операции над событиями – сумма и произведение событий.

Определение 1. ***Суммой*** событий A и B называется событие, обозначаемое A+B и состоящее в том, что в результате опыта наступит или событие A или событие B, или оба вместе.

Определение 2. ***Произведением*** событий A и B называется событие обозначаемое AB и состоящее в том, что в результате опыта наступит и событие A и событие B.

На рис.1. сумма и произведение событий изображены в виде диаграмм Эйлера.

Операции дополнения множества A^* соответствует операция перехода от заданного события к противоположному.

Определение 3. Событием, ***противоположным*** событию A, называется событие обозначаемое $\overline{A}$ и состоящее в том, что в результате опыта событие A не наступит.

Множество событий вместе с операциями суммы, произведения событий и перехода к противоположному событию составляют ***алгебру событий***.

Так для полной группы событий $A_1, A_2, \quad, A_n$ будут выполняться следующие условия:

1. Событие $A_1 + A_2 + \quad + A_n$ - достоверное.

2. События $A_i A_j$ ($i \neq j$) попарно несовместны, то есть $A_i A_j = 0$ (невозможное событие).

Операции суммы событий, произведения событий и дополнения обладают следующими основными свойствами:

1. $A + B = B + A$.
2. $AB = BA$.
3. $A(B + C) = AB + AC$.
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
5. $(AB)C = A(BC)$.
6. $(A + \overline{A})B = B$.
7. $(AB) + B = B$.
8. $(A + B)B = B$.
9. $A + (BC) = (A + B)(A + C)$.
10. $A\overline{A} + B = B$

Определение 4. События A и B называются ***несовместными***, если из произведение, есть невозможное событие или $A \quad B = \varnothing$. Таким образом мы уточнили определение данное ранее на языке множеств.

1.3.1 Теоремы сложения вероятностей.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

Данная теорема легко обобщается на случай m попарно несовместных случайных событий $A_1, A_2, \quad, A_m$:

$$p(A_1 + A_2 + \quad + A_m) = p(A_1) + p(A_2) + \quad + p(A_m).$$

Теорема 2. Сумма вероятностей событий полной группы равна единице.

Следствие. Если $p(A)$ - вероятность события A, то $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ - вероятность события, противоположного A. Так как события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Теорема 3. Пусть A и B совместные события, тогда вероятность суммы событий $A+B$:

$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$. (Геометрическую интерпретацию можно увидеть на диаграмме Эйлера для пересечения двух множеств A и B.)

Следствие: Так как $p(AB) \geq 0$, то $p(A+B) \leq p(A) + p(B)$, т. е. вероятность суммы двух событий никогда не превосходит суммы вероятностей этих событий. Утверждение справедливо и для нескольких событий.

1.4 Примеры вычисления вероятности в классической схеме.

1. В урне находятся 5 шаров, из которых 3 черных и 2 белых. Наудачу извлекают один шар. Какова вероятность, что он окажется белым?

Решение: Пространство элементарных событий состоит из 5 элементов ($n = 5$); два из них благоприятствуют рассматриваемому событию ($m = 2$). Следовательно, вероятность равна $p = \frac{2}{5}$.

2. При тех же условиях из урны последовательно извлекают два шара (первый шар возвращают в урну). Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми.

Решение: Здесь пространство элементарных событий состоит из всевозможных упорядоченных пар чисел:

(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5);
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5);
(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5);
(4, 1); (4, 2); (3, 4); (4, 4); (4, 5);
(5, 1); (5, 2); (3, 5); (4, 5); (5, 5),

где пара чисел (i, j) означает элементарное событие, состоящее в том, что первым был взят шар с номером i, а затем шар с номером j. Таким образом пространство элементарных событий состоит из 25 элементов. Предположим, что номера белых шаров 1 и 2. Тогда четыре элемента данного множества (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) удовлетворяют требованию задачи. То есть $p = \frac{4}{25}$.

3. Пусть из той же урны извлекают два шара, но первый шар в урну не возвращают. Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

Решение: Теперь пространство элементарных событий

(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5);
(2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5);
(3, 1); (3, 2); (3, 4); (3, 5);
(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 5);
(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4),

то есть содержит 20 элементов. При этом благоприятствующих событию элементов только 2: (1, 2), (2, 1). Значит искомая вероятность $p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Теперь решим эту задачу с помощью комбинаторного подхода. В таком случае количество подмножеств пар шаров будет числом размещений $n = A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$. А количество благоприятствующих исходов $m = A_2^2 = \frac{2!}{0!} = 2$. Результат этого расчета совпадает с предыдущим $p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

4. В урне n шаров, из которых k белых, а остальные черные. Предполагается, что шары занумерованы числами 1,2, …, n и первые k шаров белые. Наудачу извлекают l шаров (без возвращения). Какова вероятность того, что все шары окажутся белыми?

Решение: Здесь элементарное событие представляет собой неупорядоченный набор из l чисел множества $\{1,2,\quad,n\}$ (то есть множества шаров). Количество таких наборов равно количеству сочетаний из n элементов по l, т. е. $C_n^l = \frac{n(n-1)(n-2)\quad(n-l+1)}{1\cdot 2\cdot\quad\cdot l}$.

Элементарные события, благоприятствующие появлению l белых шаров, характеризуются неупорядоченным набором из l чисел множества $\{1,2,\quad,k\}$. Количество таких наборов составляет $C_k^l = \frac{k(k-1)(k-2)\quad(k-l+1)}{1\cdot 2\cdot\quad\cdot l}$. Следовательно, вероятность рассматриваемого события такова $p = \frac{C_k^l}{C_n^l} = \frac{k(k-1)(k-2)\quad(k-l+1)}{n(n-1)(n-2)\quad(n-l+1)}$. Например, при $n = 10$, $k = 4$, $l = 3$ имеем $p = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$.

5. В условиях предыдущего примера, определить вероятность того, что из l выбранных шаров l_1 окажутся белыми, а l_2 черными.($l_1 + l_2 = l$).

Решение: Количество всех наборов белых шаров равно $C_k^{l_1}$, а количество всех наборов черных шаров $C_{k-l}^{l_2}$. Так как для получения набора из l шаров, содержащего l_1 белых и l_2 черных шаров можно соединить любой набор белых шаров с любым набором черных шаров, то количество элементарных событий, благоприятствующих этому событию (согласно правилу умножения), равно $C_n^{l_1}\cdot C_{n-l}^{l_2}$. Поэтому искомая вероятность $p = \frac{C_n^{l_1}\cdot C_{n-l}^{l_2}}{C_n^k}$.

Последний пример является типичным в классической схеме подсчета вероятностей, пригодной для решения сугубо практических задач, когда из выборки объема N (это может быть изделия) выбираются M объектов, из которых часть может быть нестандартной (бракованной) и т.д. и нужно определить вероятность такого события.

1.5 Геометрическая вероятность.

Строгое определение понятия вероятности развивает идею конечного пространства элементарных событий. Т.е. предполагается, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно. Например, изготовление детали определенного размера. Каждая деталь имеет свое отклонение, все отклонения лежат в некотором заданном диапазоне, который состоит из бесконечного множества значений.

Пусть на плоскости имеется некоторая фигура F, содержащая фигуру f. На фигуру F наугад бросается точка, которая может оказаться в любой точке фигуры F. Опыт имеет бесконечное множество исходов. Брошенная точка может оказаться внутри фигуры f, а может и не оказаться. В данном случае будет естественно связать вероятность с площадями фигур f и F. Чем больше f, тем больше вероятность. Пусть A – событие, состоящее в попадании точки в область f. S_F, S_f - соответствующие площади, тогда под вероятностью события А будем полагать отношение данных площадей. $p(A)=\dfrac{S_f}{S_F}$. Будем называть f - фигурой, благоприятствующей появлению A.

В приведенном примере рассматривались двумерные области, мерами которых является площадь. В общем случае область может быть кривой, отрезком с мерой длиной, или объемом.

<u>Определение.</u> Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей наступлению события, к мере всей области.

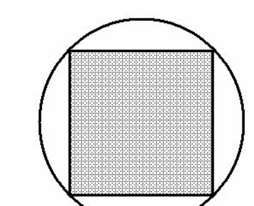

Рис 2.

$$p(A)=\frac{mes\, f}{mes\, F}.$$ ($mes\, G$ - *measure* (фр.) мера)

Пример 1. В круг вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в квадрат.

Решение: Пусть R - радиус круга, a - сторона квадрата. (Рис. 2) Площадь круга $S=\pi R^2$, сторона вписанного квадрата $a=\sqrt{2}R$. Площадь квадрата $S_1=2R^2$. $S_f=S_1$, $S_F=S$. $p(A)=\dfrac{2R^2}{\pi R^2}=\dfrac{2}{\pi}\approx 0{,}637$

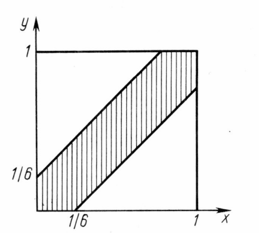

Рис 3.

Пример 2. Два приятеля договорились встретиться в установленном месте в промежутке времени от 6 до 7 часов. По взаимному соглашению каждый приходит на место встречи в случайный наугад выбранный момент и ждет другого ровно 10 мин. Какова вероятность, что приятели встретятся?

Решение: Пусть x и y означают моменты прихода на место встречи первого и второго приятеля соответственно. Такое событие удобно отметить точкой квадрата. Условие встречи заключается в том, что $|x-y|<1/6$. (Сторона квадрата соответствует часу времени, 10 мин. составляет 1/6.) На рис. 3 множество точек удовлетворяющих этому условию отмечено. Площадь этого множества равна 11/36. И согласно формуле $p=\dfrac{11/36}{1}=\dfrac{11}{36}$.

§2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

<u>Определение 1.</u> Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность события A не зависит от того, наступило событие B или нет B противном случае A называется зависимым от события B.

Например, из деревьев леса выбирают те, что выше 15 м.(событие A), толще 1м. (событие B). Очевидно, что события A и B зависимы.

<u>Определение 2.</u> Вероятность наступления события A при условии, что событие B наступило, называется ***условной вероятностью*** и обозначается $p_B(A)$ или $p(A/B)$.

Теорема (умножения вероятностей). Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что A произошло, т. е. $p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$.

Если A и B независимы, то $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$.

Следствие. Если случайное событие B не зависит от A, то и A не зависит от B.

Примеры: 1. В урне 3 черных и 2 белых шара. Последовательно (без возвращения) извлекают 2 шара. События A – первым был извлечен белый шар, B – второй шар черный. Найдем $p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$.

$$p(A) = \frac{2}{5},\ p_A(B) = \frac{3}{4},\ p(AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

2. Найти вероятность двух последовательных выпадений герба при двух бросках монеты.

$p(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. События независимы и их вероятность равна $p(A) = p(B) = 1/2$, где A – выпадение герба при первом броске, B – выпадение герба при втором броске.

3. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один попадет в цель.

Решение: Введем обозначения: событие A – попадание 1-го стрелка, В – попадание 2-го стрелка, C – попадание 3-го стрелка, D – попадание хотя бы одного стрелка.

Событие D противоположно событию $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0{,}15$

$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 0{,}2$

$p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 0{,}3$

Так как события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ - независимы, то $p(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = p(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}) \cdot p(\overline{C}) = 0{,}009$.
$p(D) - 1 - p(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0{,}991$.

2.1 Формула полной вероятности.

Теорема (о полной вероятности). Пусть событие А может произойти в результате появления одного и только одного события B_i ($i = 1, 2, \quad, n$) из некоторой полной группы событий $B_1, B_2, \quad, B_n$ (попарно несовместных). Их называют гипотезами. Пусть $p(B_1), p(B_2), \quad, p(B_n)$ - вероятности соответствующих событий $B_1, B_2, \quad, B_n$, а $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), \quad, p_{Bn}(A)$ - условные вероятности наступления события A при условии наступления событий $B_1, B_2, \quad, B_n$ соответственно. Тогда вероятность $p(A)$ события A равна сумме произведений вероятностей событий B_i на условные вероятности $p_{B_i}(A)$.

$$p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \quad + p(B_n) p_{Bn}(A)$$

Это формула полной вероятности.

Примеры. 1. Производится 4 выстрела по некоему объекту.

Вероятность попадания в цель n снарядов:

n	1	2	3	4
p	0,4	0,26	0,22	0,03

Вероятность разрушения цели при попадании n снарядов:

n	1	2	3	4
p	0,5	0,7	0,8	0,99

Событие A – разрушение объекта. Найдем его вероятность.
$p(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}26 \cdot 0{,}7 + 0{,}22 \cdot 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 0{,}99 = 0{,}5877$.

2. На фабрике и изготавливают болты. Первая машина производит 30% , вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным.

Решение: *A* – событие, что болт дефектный. B_1, B_2, B_3 - события состоят в том, что болт изготовлен соответственно первой, второй и третьей машиной.

$p(B_1) = 0{,}3; p(B_2) = 0{,}25; p(B_3) = 0{,}45$

$p_{B_1}(A) = 0{,}02; p_{B_2}(A) = 0{,}01; p_{B_3}(A) = 0{,}03$

$p(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}022$

2.2 Формулы Байеса.

Теорема (Байеса). Пусть $B_1, B_2, \quad, B_n$ попарно несовместны и пусть событие *A* может наступить только вместе с одним из событий $B_1, B_2, \quad, B_n$. Известны $p(B_1), p(B_2), \quad, p(B_n)$ и условные вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), \quad, p_{Bn}(A)$. Известно также, что *A* наступило. Тогда вероятности событий $B_1, B_2, \quad, B_n$ находятся по формулам:

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \quad + p(B_n) \cdot p_{Bn}(A)};\ i = 1, 2, \quad, n\ .$$

Несколько комментариев к формуле: 1.Вероятности $p_A(B_i)$ называют ***после-опытными*** (апостеорными) вероятностями событий B_i, а $p(B_i)$ - ***доопытными*** (априорными) вероятностями. Эти вероятности различны.

2. В знаменателе стоит $p(A)$, найденная по формуле полной вероятности.

3. События $B_1, B_2, \quad, B_n$ - гипотезы, и формула Байеса дает вероятность гипотезы B_i, при которой наступило событие *A*.

Примеры. 1.Поломка прибора (событие А) может быть вызвана одной из трех причин B_1, B_2, B_3. $p(B_1) = 0{,}7; p(B_2) = 0{,}2; p(B_3) = 0{,}1$. При наличии этих причин поломка происходит с вероятностью $p_{B_1}(A) = 0{,}1$; $p_{B_2}(A) = 0{,}2$; $\quad p_{B_3}(A) = 0{,}2$. Найти вероятности $p_A(B_1); p_A(B_2); p_A(B_3)$, если событие *A* наступило.

Решение: По формулам Байеса

$p_A(B_1) = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2} = \dfrac{0{,}07}{0{,}13} = \dfrac{7}{13} \approx 0{,}54$, аналогично $p_A(B_2) = \dfrac{4}{13} \approx 0{,}3$

$p_A(B_3) = \dfrac{2}{13} \approx 0{,}15$.

2. В первой урне 2 голубых и 6 красных шаров, во второй 4 голубых и 2 красных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны достали один шар. Какова вероятность, что этот шар голубой? Предположим, что шар, взятый из второй урны, оказался голубым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 голубых шара?

Решение: Событие А – шар, извлеченный из второй урны – голубой. Гипотезы B_1 - переложили 2 голубых шара; B_2 - переложили голубой и красный шары; B_3 - переложили 2 красных шара. Вычислим вероятности гипотез (априорные) по комбинаторной схеме: $p(B_1) = \dfrac{C_2^2}{C_8^2} = \dfrac{1}{28}$, $p(B_2) = \dfrac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \dfrac{12}{28}$, $p(B_3) = \dfrac{C_6^2}{C_8^2} = \dfrac{15}{28}$. Соответствующие условные вероятности: $p_{B_1}(A)=\frac{3}{4}$, $p_{B_2}(A)=\frac{5}{8}$, $p_{B_3}(A)=\frac{1}{2}$. По формуле полной вероятности найдем $p(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$.

Теперь найдем апостеорную вероятность гипотезы B_1:

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(A)}=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}\Big/\frac{9}{16}=\frac{1}{21}\approx 0{,}05.$$

Могут возникнуть вопросы о применениях формулы Байеса в практических целях. Пусть имеется несколько предположений (несовместимых гипотез) для объяснения некоторого явления. Эти предположения проверяют с помощью опыта. Перед началом опыта (эксперимента) часто бывает трудно определить вероятности этих предположений – гипотез (априорных, доопытных), поэтому гипотезам присваиваются определенные вероятности из интуитивных или каких-либо других соображений. Затем проводят эксперимент и получают первую информацию, на основании которой выполняют коррекцию доопытных вероятностей. Таким образом основываясь на результатах опыта, заменяют доопытные вероятность послеопытными (апостеорными). При этом вероятности гипотез после опыта могут измениться. Эксперимент можно проводить далее, и по мере поступления новой информации будет укрепляться предположение о справедливости той или иной гипотезы.

§3. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли).

Пусть производится серия из n испытаний в каждом из которых событие *A* может наступить, а может и не наступить. Пусть выполняется следующее условие: вероятность p наступления события в каждом испытании постоянна и не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний. Это условие означает, что последовательность испытаний независима.

Последовательность испытаний, удовлетворяющая указанному условию, называется ***последовательность независимых испытаний (или схема Бернулли***).

Схема Бернулли полностью определяется двумя числами: числом испытаний - n и вероятностью наступления события в одном испытании - p.

Примеры: 1. Монета подбрасывается n раз с вероятностью выпадения «герба» или «решки» $p=1/2$.

2. Производится n выстрелов по мишени с вероятностью p попасть в цель.

В связи со схемой Бернулли могут рассматриваться такие задачи:

1. Найти вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n испытаний событие *A* наступит ровно k раз.

2. Найти вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что в серии из n испытаний количество k наступлений события *A* будет находиться в пределах $k_1\le k\le k_2$.

3. Решить предыдущие задачи для большого числа n испытаний. (Эти задачи решаются с помощью локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа.)

3.1 Формула Бернулли.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в последовательности из n испытаний в схеме Бернулли событие *A* наступит k раз, выражается формулой $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, где C_n^k -

число сочетаний из n элементов по k. p - вероятность наступления события А в одном испытании, $q = 1 - p$ - вероятность ненаступления события A в одном испытании.

Для вычисления вероятности $P_n(k_1, k_2)$ того, что в схеме Бернулли из n испытаний количество m наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le m < k_2$, можно воспользоваться формулой

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \quad + P_n(k_2 - 1).$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(k_0)$ называется наивероятнейшим числом появления события A. При заданных n и p это число определяется неравенствами $np - q \le k_0 \le np + p$.

Если число $np + p$ не является целым, то k_0 равно целой части этого числа $k_0 = [np + p]$; если же $np + p$ - целое, то k_0 имеет 2 значения $k_0' = np - q$ и $k_0'' = np + q$.

Вероятность того, что в n опытах событие A прявится хотя бы 1 раз определяется формулой

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - q^n.$$

Примеры: 1. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты выпадет ровно 3 «герба».

Решение: Здесь $n = 10$, $k = 3$, $p = q = 1/2$. Согласно формуле Бернулли получим $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{1024}$.

2. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 1/3$. Найти вероятность того, что из 6 выстрелов 3 поразят мишень.

Решение: $n = 6$, $k = 3$, $p = 1/3$, $q = 2/3$.

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}.$$

3. Вероятность изготовления на станке автомате нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых 6-ти деталей окажется более 4-х стандартных?

Решение: $n = 6$, $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$. Более 4-х стандартных означает, что будет 5 или 6 стандартных деталей или 0 или 1 нестандартная.

$$P_6(0 \le k \le 1) = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^6 + C_6^1 \cdot (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^5 \approx 0{,}9943.$$

4. Какое минимальное число опытов достаточно провести, чтобы с вероятностью, не меньше чем α ($1 < \alpha < 1$), можно бы было ожидать наступления события A хотя бы один раз, если вероятность события A в одном опыте равна p.

Решение: Вероятность наступления события A хотя бы один раз в n опытах должна быть на меньше α, т.е. $1 - q^n \ge \alpha$ или $\left(1 - (1-p)^n\right) \ge \alpha$. Решим неравенство относительно n. $1 - \alpha \ge (1-p)^n$. Прологарифмируем левую и правую части: $\lg(1-\alpha) \ge n \lg(1-p)$. Так как $1 - p < 1$, то $\lg(1-p) < 0$. Делим правую и левую части неравенства на это выражение и получаем, что $n \ge \frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-p)}$. Т. е. $n_{\min} = \left[\frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-p)}\right] + 1$.

Вычислим это значение, например при $p = 0{,}02$ и $\alpha = 0{,}98$. $n_{\min} = 80$.

5. В схеме Бернулли, связанной с бросанием монеты вычислим вероятности $P_{10}(k)$, где

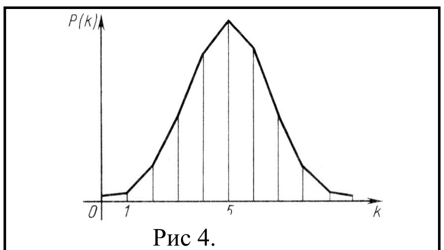

Рис 4.

$k=1,2,\quad,10$. (т.е. вероятности того, что при 10 испытаниях «герб» выпадет ровно k раз). Построим график распределения этих вероятностей.

Решение: Используя формулу Бернулли найдем: $P_{10}(0)=P_{10}(10)=\dfrac{1}{1024}$,

$$P_{10}(1)=P_{10}(9)=\frac{10}{1024},\ P_{10}(2)=P_{10}(8)=\frac{45}{1024},\ P_{10}(3)=P_{10}(7)=\frac{120}{1024},$$

$$P_{10}(0)=P_{10}(10)=\frac{1}{1024},\ P_{10}(4)=P_{10}(6)=\frac{210}{1024},\ P_{10}(5)=\frac{252}{1024}.$$

Теперь изобразим результаты графически. (Рис.4)

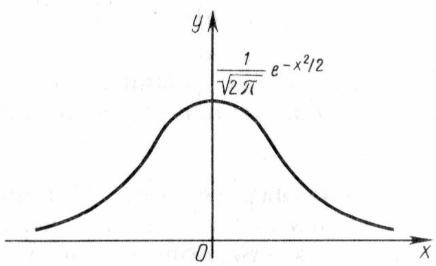

Рис. 5

Данный пример приведен совсем не случайно. Обратим внимание на характерный вид изображенной на рисунке ломанной, имеющей пик в точке $k=5$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с кривой $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ (Рис.5). Она называется гауссовой кривой (или кривой нормального распределения) и играет исключительно важную роль в теории вероятности и математической статистики. Тот факт, что ломаная на рис. и кривая на рис. имеют значительное сходство, не случаен. Причины этого явления раскрываются локальной теоремой Муавра – Лапласа.

3.2 Локальная теорема Муавра – Лапласа.

Формула Бернулли становится неудобной при больших n: в этом случае затруднение вызывает вычисление C_n^k.

<u>Теорема.</u> Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а чило испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие А наступит k раз, приблизительно равна (чем больше n, тем точнее) значению функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}f(x)$, где $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, а $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Комментарий к теореме: 1. «Грубое» правило для применения данной теоремы вместо формулы Бернулли состоит в том, что n должно иметь порядок не менее нескольких десятков, а лучше сотен, и $np>10$ (или $npq>10$).

2. Значение функции следует брать из таблиц и следует помнить, что функция $\varphi(x)$ - четная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

3. Заметим, что $P_n(k)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Наибольшая из вероятностей $P_n(k)$ достигается при $k\approx np$ (k ближайшее к np целое число).

Примеры: 1. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты герб выпадет: а) ровно 50 раз; б) ровно 60 раз.

Решение: а) $n=100$, $k=50$, $p=q=0,5$.

$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \varphi(x) = \frac{1}{5}\varphi(x)$, где $x = \frac{50 - 0{,}5 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0$. Значение функции находим из таблицы $\varphi(0) = 0{,}3989$, $P_{100}(50) == \frac{1}{5} \cdot 0{,}3989 = 0{,}079$.

б) Аналогично $P_{100}(60) = \frac{1}{5}\varphi(x)$, $x = \frac{60 - 0{,}5 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2$

$P_{100}(60) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}054 = 0{,}0108$.

2. Вероятность того, что деталь стандартная $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что из 400, сошедших с конвейера деталей 356 окажется стандартными.

Решение: $n = 400$, $k = 356$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$.

$P_{400}(356) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \varphi(x) = \frac{1}{6}\varphi(x)$, $x = \frac{356 - 0{,}9 \cdot 400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -0{,}67$

$\varphi(-0{,}67) = 0{,}3188$, $P_{400}(356) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}3188 = 0{,}0531$.

Такое небольшое значение вероятности, несмотря на то, что вероятность появления стандартной детали 0,9, объясняется тем, что была вычислена вероятность только одного из 401 исходов испытания состоящего в отборе 400 деталей.

Реально количество стандартных деталей будет находиться в некотором промежутке $k_1 < k < k_2$ и эта вероятность будет значительно большей. Для того, чтобы найти такую вероятность используют интегральную теорему Муавра – Лапласа.

3.3 Интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Данная теорема дает ответ на вопрос, как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ в схеме Бернулли при большом n.

Теорема. При больших значениях n в схеме Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(k_2') - \Phi(k_1'), \text{ где } k_1' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ k_2' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_o^x e^{-t^2/2} dt.$$

Комментарий к теореме: Функция $\Phi(x)$ - функция Лапласа. Она табулирована и таблицы ее значений даны в каждом учебнике по теории вероятности. Эта функция – нечетная, ее график изображен на рис.6. Отметим также, что при $x > 3$ значения функции $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

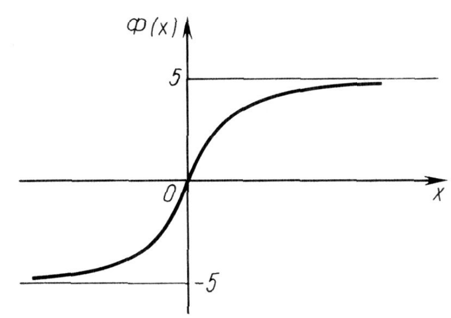

Рис. 6.

Пример: Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты количество гербов будет находиться в следующих пределах: а) (45, 55); б) (35, 65).

Решение: а) Здесь $n = 100$, $p = q = 0{,}5$, $k_1 = 45$, $k_2 = 55$. $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$.

$k_1' = \frac{45 - 50}{5} = -1$, $k_2' = \frac{55 - 50}{5} = 1$,

$\Phi(1) = 0{,}3413$.

$P_{100}(45{,}55) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$.

б) $k_1 = 35$, $k_2 = 65$ $k_1{}' = \dfrac{35-50}{5} = -3$, $k_2{}' = \dfrac{65-50}{5} = 3$, $\Phi(3) = 0{,}4986$.

$P_{100}(35{,}65) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Из результатов вычислений видно, что вероятности рассматриваемых событий достаточно велики, особенно последняя вероятность 0,9973. События, имеющие большую вероятность, называются *практически достоверными*. Очень часто практически достоверным считают событие, вероятность которого не меньше 0,9973.

3.3.1 Правило «3-х сигм» в схеме Бернулли.

Рассмотрим схему Бернулли с большим количеством n испытаний; обозначим через σ число $\sqrt{npq}$. Из интегральной теоремы Муавра – Лапласа вытекает, что $P_n(np - 3\sigma, np + 3\sigma) = 0{,}9973$.

Данная формула позволяет для каждой схемы Бернулли указать интервал (k_1, k_2) такой, что количество наступления события A принадлежит этому интервалу с вероятностью 0,9973, т.е. является практически достоверным. Данная формула называется *правилом «трех сигм»*, а интервал (k_1, k_2), где $k_1 = np - 3\sqrt{npq}$, $k_2 = np + 3\sqrt{npq}$ - *трехсигмовым интервалом*.

Пример: Некоторая система состоит из 10000 (независимых) элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна 0,5. Пусть m - количество вышедших из строя элементов системы. Найти трехсигмовый интервал.

Решение: Имеем $n = 10000$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$. $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 50$, $k_1 = np - 3\sigma = 5000 - 150$, $k_2 = np + 3\sigma = 5000 + 150$. Таким образом можно утверждать, что с вероятностью 0,9973 количество вышедших из строя элементов $5000 - 150 \le m \le 5000 + 150$.

3.4. Теорема Пуассона.

Рассмотрим схему Бернулли с малой вероятностью p появления события A в одном испытании и с большим количеством n испытаний. Пусть при большом n малая вероятность p такова, что $pn = a$, где a - некоторое число. Тогда вероятность $P_n(k)$ в такой схеме Бернулли описывается следующей теоремой.

Теорема (Пуассона). Если вероятность p наступления события А к каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np = a$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит k раз приближенно равна

$P_n(k) \approx \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$. (формула Пуассона)

Из формулы видно, что вероятность в такой схеме Бернулли не зависит от числа испытаний. Большое применение формула Пуассона находит в *теории массового обслуживания.*

Примеры: 1. При выработке продукции вероятность появления одного нестандартного изделия $p = 0{,}01$. Какова вероятность того, что в партии из $n = 100$ изделий будет $k = 2$ нестандартных.

Решение: $a = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$

$$P_{100}(2) \approx \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0{,}184.$$

2. Телефонная станция получает за час в среднем s вызовов. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит ровно k вызовов?

Решение: Изучаемый интервал времени (1мин.) разбиваем на n равных интервалов Δi. Работу станции в эту минуту можно рассматривать как последовательность испытаний (в каждом интервале происходит испытание – будет или нет получен вызов). Задача состоит в том, чтобы вычислить вероятность k событий в n испытаниях, где p - вероятность вызова в интервале Δi. $p = \dfrac{s}{60n}$, $\lambda = pn = \dfrac{s}{60}$, $P_n(k) \approx e^{-\frac{s}{60}} \dfrac{\left(\frac{s}{60}\right)^k}{k!}$.

В последнем случае мы рассмотрели важную задачу из теории массового обслуживания.

§4. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение. ***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате испытания принимает то или иное значение. При этом заранее неизвестно, какое именно значение случайная величина примет в результате опыта.

Изучая случайную величину, прежде всего, интересуются множеством ее возможных значений. Множество значений случайной величины может быть конечным множеством чисел или содержать целый отрезок числовой оси. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечного или бесконечного *счетного* множества. , называется *дискретной случайной величиной*. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

Примеры случайных величин: 1. Количество очков, выпавшее при бросании игральной кости. Множество значений: $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. Количество наступлений события А в схеме Бернулли. Множество значений: $\{0,1,2, \quad ,n\}$.

3. Число бракованных изделий в случайно отобранной партии из 20 изделий. Множество значений: $\{0,1,2, \quad ,20\}$.

4. Дальность полета артиллерийского снаряда. Множество значений: $[0, L]$, где L - максимальная дальность.

5. Время безотказной работы электролампы. Множество значений: $[0, T]$, где T - максимальное время безотказной работы.

6. Угол между начальным направление и направлением остановившейся стрелки рулетки. Множество значений: $[0, 2\pi]$.

В примерах 1 – 3 величины дискретные, 4 – 6 – непрерывные.

Случайные величины обозначаются X, Y, Z , а их значения $x_1, x_2, x_3, \quad$.

Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \quad , x_n$, а случайная величина Y - $y_1, y_2, y_3, \quad , y_n$. Введем операции над случайными величинами.

Определение 1. Суммой $X + Y$ случайных величин X и Y называется случайная величина Z, возможные значения которой есть $x_1 + y_1, x_1 + y_2, \quad , x_1 + y_j, \quad , x_1 + y_n, x_2 + y_1, x_2 + y_2, \quad x_i + y_j, \quad , x_n + y_n$.

То есть в результате опыта величина X получает одно из возможных значений x_i, а Y - y_j, после чего полученные числа складываются. Число $x_i + y_j$ является одним из возможных значений случайной величины $Z = X + Y$.

Определение 2. Произведением XY случайных величин X и Y называется случайная величина Z, возможные значения которой есть $x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_j, \ldots, x_1y_n, x_2y_1, x_2y_2, \ldots x_iy_j, \ldots, x_ny_n$.

Определение 3. Произведением случайной величины X на постоянную C называется случайная величина Z, возможные значения которой есть $Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n$.

Понятие суммы и произведения случайных величин можно по аналогии распространить на любое конечное число случайных величин.

4.1. Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение: Распределением дискретной случайной величины называется функция, сопоставляющая каждому возможному значению случайной величины x_k ее вероятность p_k. ($0 \le p_k \le 1$), причем $\sum p_k = 1$.

Можно определить распределение формулой $P(X = x_k) = p_k$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Также этот закон распределения числом n возможных значений можно задать таблицей.

x_1	x_2		x_n
p_1	p_2		p_n

Эта таблица называется *рядом распределения*.

Так для случайной величины из примера 1 ряд распределения имеет вид

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Для случайной величины из примера 2 при $n = 10$, $p = 1/2$ ряд распределения:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Распределение полностью характеризует случайную величину, указывая возможные значения и вероятности, с которыми эти значения появляются в результате испытаний.

Функция распределения случайной величины.

Для непрерывной случайной величины невозможно задать распределение по аналогии с дискретной случайной величиной. Мы увидим, что для непрерывной случайной величины вероятность того, что она примет заданное значение x из множества значений, как правило, равна нулю. Поэтому бессмысленно говорить о вероятности появления данного конкретного значения случайной величины, а имеет смысл изучать вероятности того, что значение случайной величины попадет в заданный интервал $[\alpha, \beta)$.

Определение: Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

Иногда функцию $F(x)$ называют *интегральной функцией распределения*.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ является непрерывно дифференцируемой.

Функция распределения обладает следующими основными свойствами:

1. Если $F(x)$ - функция распределения случайной величины X, то $0 \le F(x) \le 1$ для любого x.

2. Функция $F(x)$ - монотонно неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

5. Вероятность $P(\alpha \le x < \beta)$того, что случайная величина X примет значение в полуинтервале $[\alpha, \beta)$ равна $P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

На основании данного свойства легко доказать, что если X - непрерывная случайная величина, то вероятность любого отдельного значения равна нулю, т.е. $P(X = \alpha) = 0$. Поэтому выполняются равенства:
$P(\alpha \le x < \beta) = P(\alpha \le x \le \beta) = P(\alpha < x \le \beta) = P(\alpha < x < \beta)$.

<u>Плотность распределения вероятностей.</u>

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины дает полную вероятностную характеристике ее поведения. Однако задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным. Ее можно задать с помощью другой функции, которая называется *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью* распределения вероятностей. В некотором смысле эта функция более удобная, чем интегральная функция $F(x)$. Используя функцию $F(x)$, трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси. Решить эту задачу позволяет плотность распределения вероятностей.

Плотностью распределения вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине Δx отрезка $[x, x + \Delta x]$, когда последняя стремиться к нулю $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$.

На основании известного нам понятия производной функции можно обозначить $f(x) = F'(x)$, т.е.

<u>Определение.</u> Пусть X - непрерывная случайная величина и $F(x)$ - ее интегральная функция распределения. Пусть $F(x)$ дифференцируема всюду за исключением, быть может, конечного числа точек. Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения вероятностей $f(x)$ называется первая производная интегральной функции распределения $F(x)$.

Значения функции чаще называют *плотностью вероятности* и иногда обозначают $p(x)$.

График функции $f(x)$ называют *кривой распределения*.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Для любых x дифференциальная функция распределения $f(x)$ неотрицательна, т. е. $f(x) \ge 0$.

2. $P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

4. Для интегральной и дифференциальной функций распределения имеет место равенство $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Пример. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти функцию распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

Решение: Найдем сначала закон распределения данной случайной величины X. Эта величина может принимать 3 значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вычислим вероятности этих значений.

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45},\ p_2 = P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45},$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Теперь строим функцию распределения.

1. При $x \le 0$ $F(x) = P(X < 0) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$ $F(x) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{45}$.

3. При $1 < x \le 2$ $F(x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(x = 1) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} = \frac{17}{45}$.

4. При $x > 2$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1$.

<u>Биномиальное, пуассоновское, нормальное, равномерное и показательное распределения.</u>

Рассмотрим несколько видов теоретических распределений, играющих важную роль в теории вероятностей и математической статистики.

<u>Определение 1.</u> Распределение случайной величины X равной количеству наступлений события А в схеме Бернулли из n испытаний называется *биномиальным* распределением.

Биномиальное распределение дискретно. Примером такого распределения служит таблица примера 2 со стр.21.

<u>Определение 2</u>. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k \in \{0,1,2 \quad\}$ с вероятностями $\frac{a^k}{k!}e^{-a}$, где $a = np$ - параметр, называется *пуассоновским распределением* (или *распределением Пуассона*).

Данная случайная величина также является дискретной, но в отличие от биномиального распределения она может принимать бесконечное множество значений. Модель пуассоновского распределения была рассмотрена в примере, описывающем работу телефонной станции.

Определение 3. Распределение непрерывной случайной величины X, заданное дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

называется *нормальным распределением.* Здесь $a\in R$ и $\sigma>0$ - некоторые параметры.

Поясним данное определение.

1. На рис.11 изображен график функции. Кривая $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ симметрична относительно прямой $x=a$. Кроме того, на графике видно, что точки с абсциссами $x=a\pm\sigma$ являются точками перегиба. Можно получить данный график из графика стандартного нормального распределения $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ ($a=0,\sigma=1$), путем соответствующих преобразований графика (сдвигом на a единиц влево и последующим растяжением в σ раз по горизонтали относительно оси симметрии). Напомним, что функция $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ табулирована.

2. Интегральный закон распределения, соответствующий указанному дифференциальному закону, имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Последний интеграл нельзя вычислить по формуле Ньютона – Лейбница, поскольку первообразная для подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Однако удобно выразить $F(x)$ через (табулированную функцию Лапласа. $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{o}^{x}e^{-x^2/2}dx$. А именно $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

График функции $F(x)$ изображен на рис. 12.

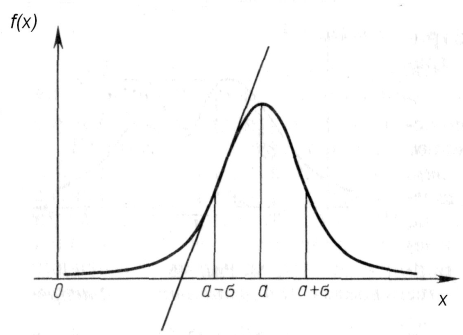

Рис. 11

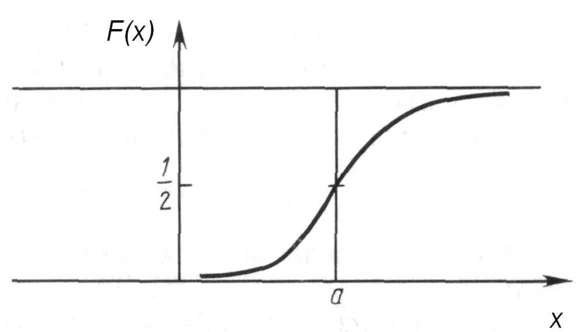

Рис.12

3. Вероятность $P(\alpha\le X<\beta)$ того, что случайная величина X примет значение в интервале $[\alpha,\beta)$, выражается, через интегральную и дифференциальную функции распределения следующим образом, с использованием (табулированных) функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ и $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{o}^{x}e^{-t^2/2}dt$:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \text{ или}$$

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\frac{\beta - a}{\sigma}}^{\frac{\alpha - a}{\sigma}} \varphi(x)dx$$

Пример: Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a = 5$, $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что X примет значение в интервале $[4,7)$.

Решение: Получим согласно формуле

$$P(4 \le X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{1}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) =$$

$$= 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$$

4. Нормальное распределение (нормальная случайная величина) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и приложениях теории вероятностей к практическим задачам.

<u>Определение 4</u>. Распределение непрерывной случайной величины, заданное дифференциальной функцией распределения,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, x < a, x > b \end{cases}$$

называется *равномерным распределением* на отрезке $[a,b]$.

1. График функции изображен на рис. 13. Равномерно распределенная на отрезке $[a,b]$ величина принимает значения только в отрезке $[a,b]$.

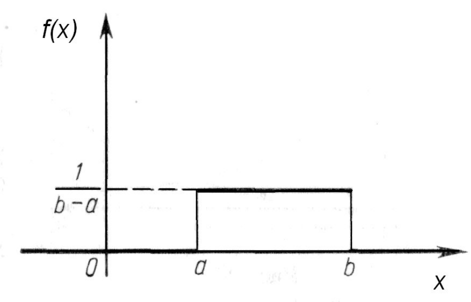

Рис. 13

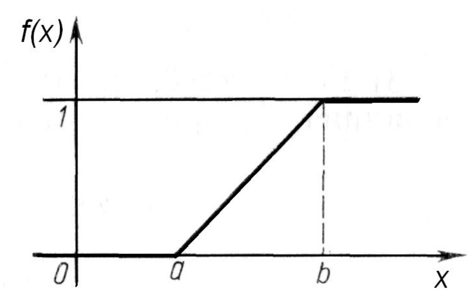

Рис. 14.

2. Интегральный закон равномерного распределения имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 14.

3. Вероятность $P(\alpha \le X < \beta)$ того, что равномерная случайная величина X примет значение в интервале $[\alpha, \beta)$, принадлежащем $[a,b]$ выражается формулой:

$$P(\alpha \le X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Т.е. вероятность попадания значений величины в интервал $[\alpha, \beta)$ зависит только от длины интервала и не зависит от его положения внутри $[a, b]$.

4. Примером равномерно распределенной случайной величины является угол остановки рулетки.

<u>Определение 5</u>. Распределение непрерывной случайной величины X, заданное дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}\ x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

называется *показательным (экспоненциальным распределением)*, где $a > 0$ - некоторый параметр.

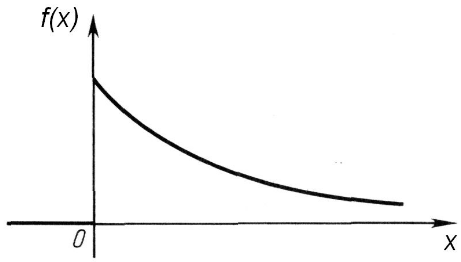

Рис. 15

1. График функции распределения изображен на рис. 15. Функция $f(x)$ быстро убывает при $x \to \infty$, величина X принимает только неотрицательные значения.

2. Интегральная функция распределения $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}.$$

3. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$ то вероятность $P(\alpha \le X < \beta)$ того, что равномерная случайная величина X примет значение в интервале $[\alpha, \beta)$, такова

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta}.$$

Если $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то $P(\alpha \le X < \beta) = 1 - e^{-a\beta}$.

Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $P(\alpha \le X < \beta) = 0$.

4. Показательный закон распределения вероятностей встречается во многих задачах, связанных с простейшим потоком событий. Под *потоком событий* понимают последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты. Например, поток вызовов на телефонной станции. Поток заявок в системе массового обслуживания и др.

<u>Числовые характеристики случайной величины</u>.
<u>Математическое ожидание и дисперсия случайной величины</u>.

<u>Определение 1.</u>

Пусть X – дискретная случайная величина, закон распространения которой имеет вид:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_1	p_2	$\cdots$	p_n

(x_i – значения, p_i – соответствующие вероятности)

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число

$$MX = \sum x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

<u>Определение 2.</u>

Пусть X - непрерывная случайная величина и $f(x)$ - ее дифференциальная функция распределения. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называют число

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$ (если этот интеграл сходится).

Математическое ожидание имеет следующий вероятностный смысл.

Пусть проведено N испытаний случайной величины X, в результате чего получены значения $x_1, x_2, ..., x_n$ - значения.

Среднее арифметическое $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N} \approx MX$ (при N -- большом).

Более строгая формулировка данного утверждения будет дана позднее.

Рассмотрим нестрогое рассуждение для дискретной случайной величины: если p_1 - вероятность x_1, а N - число испытаний, то величина x_1 выпадает Np_1 раз, соответственно x_2 - Np_2 раз и т. д. После N испытаний сумма значений будет приближенно равна $x_1 p_1 N + x_2 p_2 N + ... + x_n p_n N$, т. е. среднее арифметическое равно $\frac{x_1 p_1 N + x_2 p_2 N + ... + x_n p_n N}{N} = \sum x_k p_k$, что соответствует (2). Поэтому математическое ожидание называют также *средним значением случайной величины.*

Математическое ожидание является постоянным (не зависящим от опыта) числом, характеризующим случайную величину.

Рассмотрим основные свойства математического ожидания введя понятия независимых случайных величин.

Определение. Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения вероятностей одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются зависимыми.

Определение. Несколько случайных величин называются взаимно независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие значения приняли какие-либо другие из оставшихся величин.

Слово «взаимно» можно опускать.

Свойства математического ожидания:

1. $a \le M(x) \le b$. Значения $M(x)$ заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями.

2. $M(C) = C$, где $C = const$.

3. $M(CX) = C \cdot M(X)$.

4. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин X и Y равно алгебраической сумме из математических ожиданий, т.е. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Рассмотренное свойство легко распространяется на произвольное число слагаемых: $M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} MX_i$.

5. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий, т.е. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Это свойство распространяется на n независимых случайных величин

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \quad \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \quad \cdot M(X_n).$$

6. $M(X - MX) = 0$.

Математическое ожидание отклонения $X - MX$ случайной величины X от ее математического ожидания равно нулю.

Необходимо также ввести такую характеристику случайной величины, которая бы оценивала мере рассеяния значений величины вокруг ее математического ожидания.

Определение 3.

Пусть X - дискретная случайная величина с распределением (1). *Дисперсией* дискретной случайной величины называется число

$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k$ (5), где MX - математическое ожидание X.

Определение 4.

Пусть X - непрерывная случайная величина X и $f(x)$ - ее дифференциальная функция распределения. *Дисперсией* непрерывной случайной величины X называется число

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx$$

(если интеграл сходится); MX - математическое ожидание случайной величины X.

1. Можно сказать, что дисперсия случайной величины X есть математическое ожидание случайной величины $(X - MX)^2$.

2. Вероятностный смысл дисперсии: дисперсия характеризует среднее значение квадрата отклонения значений X от ее математического ожидания. Чем больше это отклонение по абсолютной величине, тем больше дисперсия, и обратно. Дисперсия измеряет меру рассеяния значений случайной величины относительно математического ожидания X.

3. Справедливы следующие формулы, упрощающие вычисление дисперсии:

$$DX = \sum x_k^2 p_k - (\sum x_k p_k)^2,$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x) dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx)^2.$$

Основные свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где $C = const$.

2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$, $C = const$. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

3. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин X и Y равно сумме дисперсий этих величин. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$. Это свойство можно распространить на n независимых случайных величин

$$D(X_1 + X_2 + \quad + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \quad + D(X_n).$$

Определение 5. Средним квадратическим отклонением, или стандартным отклонением, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратическое отклонение, как и дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины относительно математического ожидания.

Свойства среднеквадратического отклонения:

1. $\sigma(C) = 0$, где $C = const$.

2. $\sigma(CX) = |C| \cdot \sigma X$, $C = const$.

3. Для двух независимых случайных величин $\sigma(X + Y) = \sqrt{(\sigma X)^2 + (\sigma Y)^2}$.

Примеры. 1. Пусть X - количество очков при бросании игральной кости. Распределение этой величины имеет вид

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическое ожидание X найдем по формуле:

$$MX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Теперь также по формуле найдем дисперсию:

$$DX = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} - (MX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{35}{12}$$

2. Пусть случайная величина X - количество угаданных цифр при игре в Спорт-лото. Распределение этой величины (вычисленное по формулам комбинаторики) таково:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,4006	0,4241	0,1515	0,0224	0,0014	0,0000287	0,000000123

Тогда математическое ожидание

$$MX = 0{,}4006\cdot 0 + 0{,}4241\cdot 1 + 0{,}1515\cdot 2 + 0{,}0224\cdot 3 + 0{,}0014\cdot 4 + 0{,}0000287\cdot 5 +$$
$$+ 0{,}000000123\cdot 6 = 0{,}7999.$$

А дисперсия

$$DX = 0{,}4006\cdot 0 + 0{,}4241\cdot 1 + 0{,}1515\cdot 4 + 0{,}0224\cdot 9 + 0{,}0014\cdot 16 + 0{,}0000287\cdot 25 +$$
$$+ 0{,}000000123\cdot 36 - ,7999^2 = 0{,}6143.$$

Моменты случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются частными случаями более общих числовых характеристик случайных величин. Такими характеристиками являются моменты: начальные и центральные.

Определение 1. Начальным моментом k - того порядка ν_k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k: $\nu_k = M(X^k)$.

Для дискретной случайной величины $\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$.

Определение 2. Центральным моментом k - того порядка μ_k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - MX)^k$, т. е. $\mu_k = M(X - MX)^k$.

Для дискретной случайной величины $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x)dx$.

Из определения и свойств математического ожидания и дисперсии легко показать, что $\nu_1 = MX$, $\nu_2 = M(X)^2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = DX = \nu_2 - \nu_1^2$.

В определениях центральных моментов используются отклонения случайной величины от ее математического ожидания (центра). Поэтому моменты – центральные. В определении начальных также используются отклонения случайной величины, то от начала координат (нуля), поэтому моменты – начальные.

Числовые характеристики некоторых теоретических распределений.

Запишем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение для рассмотренных выше распределений.

1. Биномиальное распределение. Для случайной величины X распределенной по биномиальному закону можно найти что, $MX = np$, $DX = npq$, $\sigma X = \sqrt{npq}$, где p - вероятность наступления события А в схеме Бернулли, $q = 1 - p$, n -число испытаний.

2. Пуассоновское распределение. Можно доказать, что для случайной величины X, распределенной по пуассоновскому закону $MX = a$, $DX = a$, $\sigma X = \sqrt{a}$.

Таким образом, параметр a пуассоновского распределения равен математическому ожиданию и дисперсии пуассоновской случайной величины.

3. Нормальное распределение. Для этого распределения найдено, что $MX = a$, $DX = \sigma^2$, $\sigma X = \sigma$. Таким образом, вероятностный смысл параметров нормального распределения состоит в следующем: a есть математическое ожидание нормальной случайной величины, σ^2 - дисперсия, σ - среднеквадратическое отклонение.

4. Равномерное распределение. Для случайной величины, распределенной равномерно $MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma X = \dfrac{|a-b|}{2\sqrt{3}}$.

5. Показательное распределение. Можно показать, что в случае случайной величины X, имеющей показательное распределение $MX = \dfrac{1}{a}$, $DX = \dfrac{1}{a^2}$, $\sigma X = \dfrac{1}{a}$, что устанавливает вероятностный смысл параметра a в функции распределения.

Функции случайных величин.

Определение. Пусть X - случайная величина. Функцией случайной величины X называется случайная величина $Y = \varphi(X)$, которая в каждом испытании принимает значение $\varphi(x)$, где x - значение случайной величины X в том же испытании. ($\varphi(x)$ - функция, область определения которой – множество значений случайной величины X.)

Другими словами, если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X.

Главным вопросом, связанным с изучением функций случайных величин, является вопрос о законах распределения этих функций.

Пусть X - дискретная случайная величина, возможные значения которой $x_1, x_2, \quad, x_n$ имеют соответственно вероятности $p_1, p_2, \quad, p_n$. Очевидно, что Y - также дискретная величина с возможными значениями: $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$. Так как событие «величина X приняла значение x_i», влечет за собой событие «величина Y приняла значение $y_i = \varphi(x_i)$»., то вероятности возможных значений функции Y соответственно равны $p_1, p_2, \quad, p_n$.

Следовательно, математическое ожидание функции $Y = \varphi(X)$ определяется формулой $MY = M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$.

Если X - непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ - дифференцируемая строго взрастающая или строго убывающая (строго монотонная) функция, обратная к которой есть функция $x = \psi(y)$. Доказано, что тогда функция распределения $G_Y(x)$ случайной величины Y задается формулой $G_Y(x) = F(\psi(y))$.

Плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y=\varphi(X)$ вычисляется по формуле $g(y)=f[\psi(y)]\cdot[\psi'(y)]$.

После того, как мы найдем дифференциальную функцию распределения случайной величины $Y=\varphi(X)$, равную $g(y)$, математическое ожидание будет рассчитываться по формуле $MY=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy$.

<u>Совместное распределение нескольких случайных величин</u>.

В одном случайном эксперименте можно рассматривать не одну, а несколько случайных величин. Упорядоченная пара (X,Y) случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной* (*случайным вектором* двумерного пространства). Двумерная случайная величина (X,Y) называется также системой случайных величин X и Y.

Пусть в результате некоторого испытания случайные величины X и Y принимают значения x и y. Тогда двумерную случайную величину можно представить как случайную точку на плоскости xOy (или случайный вектор).

Дискретная двумерная случайная величина (X,Y) считается заданной, если известен ее закон распределения $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ ($i=1,2,\ \ ,m$; $j=1,2,\ \ ,n$).

Данный закон можно записать в виде таблицы с двойным входом.

$X \backslash Y$	y_1	…	y_j	…	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1n}	p_1
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{in}	p_i
…	…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	…	p_{mj}	…	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	…	q_j	…	q_n	1

События $(X=x_i, Y=y_j)$ образуют полную группу событий, поэтому сумма всех вероятностей p_{ij} ($i=1,2,\ \ ,m$; $j=1,2,\ \ ,n$), указанных в таблице равна 1, т.е. $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} P(X=x_i, Y=y_j)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}=1$.

Если мы просуммируем вероятности стоящие в i - той строке

$$\sum_{j=1}^{n} P(x_i, y_j)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p_i=P(X=x_i)$$

или в j -том столбце

$$\sum_{i=1}^{m} P(x_i, y_j)=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=q_j=P(Y=y_j).$$

Таким образом, по известному закону распределения двумерной случайной величины (X,Y) можно найти законы распределения составляющих величин X и Y, по указанным формулам.

Если для любой пары возможных значений $X=x$, $Y=y$ справедливо равенство $P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)=p_i q_j$, то случайные величины называются *независимыми*. Это равенство выражает необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X и Y.

В общем случае, по теореме умножения вероятностей имеем:

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j / X=x_i)$$

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(Y=y_{j_i})\cdot P(X=x_i / Y=y_j)$$

откуда получим

$$P\left(Y=y_j / X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P\left(X=x_i\right)} \quad (1)$$

$$P\left(X=x_i / Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_{j_i}\right)} \quad (2).$$

Условным законом распределение дискретной случайной величины X при $Y=y_j$, называется множество значений $x_i\,(i=1,2,\ \ ,m)$ и условных вероятностей $P\left(x_1/y_j\right)$, $P\left(x_2/y_j\right)$, …, $P\left(x_m/y_j\right)$, вычисленных из предположений, что событие $Y=y_j$ уже наступило. Этот закон задается по формуле (2).

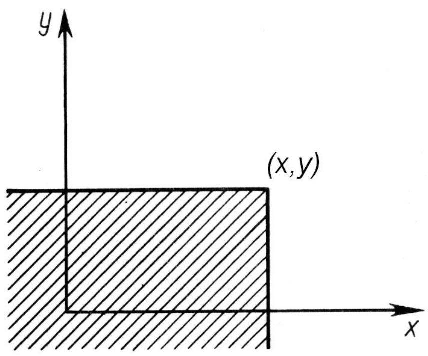

Рис. 16.

Аналогично определяется условный закон распределения дискретной случайной величины Y при $X=x_i$, его можно рассчитать по формуле (1).

Определение. Функцией распределения двумерной случайной величины (X,Y) называют функцию $F(x,y)$ двух действительных аргументов x и y определяемую равенством $F(x,y)=P(X<x, Y<y)$.

Геометрический смысл $F(x,y)$ состоит в том, что случайная точка (X,Y) попадет бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), изображенный на рис . 16.

Функция распределения $F(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1. Все значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$:

$0 \le F(x,y) \le 1$

2. Функция распределения монотонно возрастает по обеим переменным, т.е. если $x_1<x_2$, то $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$; . если $y_1<y_2$, то $F(x,y_1)\le F(x,y_2)$.

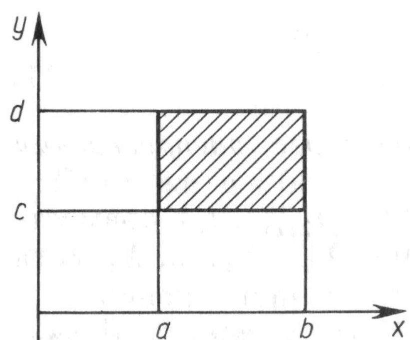

Рис. 17

3. Выполняются равенства: $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$, $F(-\infty,-\infty)=0$, $F(+\infty,+-\infty)=1$, $F(x,+\infty)=P(X<x)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=P(Y<y)=F_2(y)$, где $F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)$, $F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)$, $F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)$.

Использую функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $a\le X<b$, $c\le Y<d$ (рис 17.):

$$P(a\le X<b, c\le Y<d)=\left[F(b,d)-F(a,d)\right]-\left[F(b,c)-F(a,c)\right]$$

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x,y)$ имеет непрерывную смешанную производную $F''_{xy}=F''_{yx}$.

Аналогом дифференциальной функции распределения случайной величины для пары случайных величин является функция $f(x,y)=F''_{xy}$. Другое название этой функции плотность распределения вероятностей (двумерной случайной величины). В этом случае

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

А вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $a \le X < b$, $c \le Y < d$ (рис 17.):

$$P(a \le X < b, c \le Y < d)=\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dxdy.$$

Пусть X и Y -две случайные величины, дифференциальные функции распределения которых соответственно равны $g(x)$ и $h(x)$. Случайные величины X и Y - *независимые,* если плотность их совместного распределения – функция $f(x,y)$ имеет вид $f(x,y)=g(x)\cdot h(x)$.

Ковариация и коэффициент корреляции.

Рассмотрим случайные величины X и Y. На основании свойства 3 для математического ожидания в случае их независимости $M(XY)=MX\cdot MY$. Вполне естественно измерять «степень зависимости между случайными величинами X и Y» разностью $M(XY)-MX\cdot MY$. Как мы видим, если величины независимы, $M(XY)-MX\cdot MY=0$. На этой идее основаны понятия ковариации и коэффициента корреляции.

Определение 1. ***Ковариацией*** двух случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения их отклонений:

$$k(X,Y)=M((X-MX)(Y-MY)).$$

После преобразования правой части формула приобретает вид

$$k(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY,$$

XY - их произведение случайных величин. MX, MY, $M(XY)$- их математические ожидания. Другое обозначение ковариации $\operatorname{cov}(X,Y)$. Очевидно, что если случайные величины независимы, то $k(X,Y)=0$.

Так как $k(X,Y)$ имеет размерность XY, то при изменении единицы масштаба его значение будет подвержено изменению. Чтобы избежать этого вводится безразмерный коэффициент.

Определение 2. Коэффициент $r(X,Y)=\dfrac{k(X,Y)}{\sigma X\cdot\sigma Y}=\dfrac{M(XY)-MX\cdot MY}{\sigma X\cdot\sigma Y}$ называется ***коэффициентом корреляции***. Здесь σX, σY - среднеквадратические отклонения величин X и Y.

Этот коэффициент имеет большое значение для теории вероятностей и математической статистики.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $r(X,Y)=0$, для независимых случайных величин X и Y.
2. $-1\le r(X,Y)\le 1$ для любых двух случайных величин X и Y.
3. Если $|r(X,Y)|=1$, то случайные величины X и Y связаны соотношением $Y=aX+b$, где a и b - некоторые постоянные. Верно и обратное, если X и Y связаны условием $Y=aX+b$, то $|r(X,Y)|=1$, причем $r(X,Y)=-1$ при $a<0$ и $r(X,Y)=1$ при $a>0$.

Комментарий: Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю, а крайние значения 1 и -1 соответствуют функциональной зависимости между X и Y, имеющей вид $Y=aX+b$. Функциональная зависимость между случайными величинами – самый тесный вид зависимости. Следует иметь в виду, что существуют зависимые величины X и Y коэффициент корреляции которых равен нулю. Их называют *некоррелированными*.

Для дискретных случайных величин указанные коэффициенты можно вычислить по формулам:

$$k(X,Y) = \sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_j q_j\right),$$

$$r(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_j q_j\right)}{\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2} \cdot \sqrt{\sum y_j^2 q_j - \left(\sum y_j q_j\right)^2}}.$$

Здесь x_i и y_j - значения случайных величин X и Y, p_i и q_j - соответствующие им вероятности, p_{ij} - вероятность совместного появления событий $X = x_i$, $Y = y_j$.

Очевидно, что $\sum x_i y_j p_{ij} = M(XY)$, $\sum x_i p_i = MX$, $\sum y_j q_j = MY$,

$\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2} = \sqrt{DX} = \sigma X$, $\sqrt{\sum y_j^2 q_j - \left(\sum y_j q_j\right)^2} = \sqrt{DY} = \sigma Y$.

Для непрерывных случайных величин коэффициенты $k(X,Y)$ и $r(X,Y)$ с помощью соответствующих дифференциальных функций распределения.

Закон больших чисел.

Из повседневного опыта известно, что массовые случайные ялвения обладают свойствами устойчивости средних. Это означает что, когда n (число испытаний) случайной величины растет, то случайная величина теряет свой случайный характер. Например, величина $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$; где x_i - это i-тое испытание случайной величины X. Теоремы, описывающие такие ситуации, называются *законами больших чисел.*

Сформулируем два варианта закона больших чисел - теоремы Бернулли и Чебышева.

Лемма (неравенство Чебышева). Пусть X - произвольная случайная величина, MX и DX - соответственно ее математическое ожидание и дисперсия, $\varepsilon > 0$ -- произвольное число. Тогда справедливо неравенство

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} > 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

где $P\{|X - MX| < \varepsilon\}$ означает вероятность того, что отклонение случайной величины X от своего математического ожидания меньше, чем ε.

Теорема 1 (Бернулли). Путь k - количество наступлений события A в серии из n испытаний схемы Бернулли, p - вероятность наступления события A в одном испытании. Тогда

$$\lim_{h\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Здесь: $\frac{k}{n}$ - частота, p - вероятность.

Теорема показывает статистическое обоснование вероятности, т. е. что при большом количестве испытаний отклонение частоты от вероятности мало.

Доказательство: $MX = np$, $DX = npq$ для биноминального распределения (X - случайная величина наступления события A в схеме Бернулли). $M\left(\frac{k}{n}\right) = p$,

$D\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n}$ (из свойств математического ожидания и дисперсии). Запишем неравенство Чебышева для $X=\frac{k}{n}$:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теперь перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (Чебышева). Пусть X_i $(i=1,...,n)$ – попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения: $MX_i=a; DX_i=\sigma^2$. Тогда имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)\to 1.$$

Комментарий: можно считать, что дана одна случайная величина, которая (независимо) испытывается n раз; случайное значение i-того испытания определяет случайную величину X_i. Теорема утверждает, что среднее арифметическое мало отличается от математического ожидания при большом n.

Доказательство. Имеем

$$M\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)=\frac{1}{n}(MX_1+MX_2+...+MX_n)=\frac{1}{n}na=a.$$

$$D\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)=\frac{1}{n^2}(DX_1+DX_2+...+DX_n)=\frac{1}{n^2}\sigma^2 n=\frac{\sigma^2}{n}$$

(использованы свойства MX и DX). Неравенство Чебышева для

$X=\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)$ дает

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Переход к пределу при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

Теорему Бернулли можно считать частным случаем теоремы Чебышева.