Производная функции.

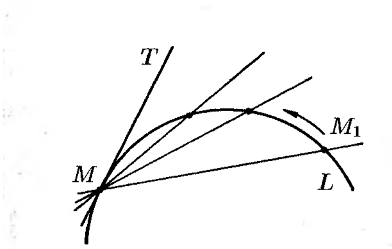
Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики и других наук, в особенности при изучении скорости разных процессов.

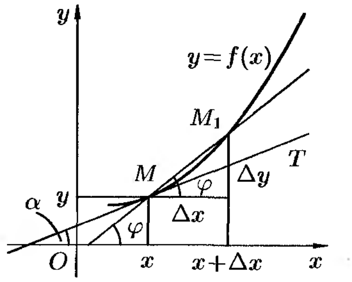
Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о касательной.

Возьмем точки M и M_1, лежащие на непрерывной кривой L. Прямую, проходящую через эти точки, называют ***секущей***. Если точка M_1 будет двигаться по кривой по направлению к M, то секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Определение. ***Касательной к данной кривой в данной точке М*** называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.





Задача. Зная уравнение непрерывной линии $y = f(x)$ найти уравнение касательной в данной ее точке.

Рассмотрим график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в точке $M\,(x, y)$ невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = tg\,\alpha$, где α – угол касательной с осью Ox.

Для этого возьмем на кривой точку M_1 с абсциссой $x+\Delta x$ и проведем секущую MM_1. φ – угол наклона секущей. Очевидно, что угловой коэффициент секущей

$$k_{сек} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Устремим точку M_1 к точке M. То есть $\Delta x \to 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ $\Delta y \to 0$ и точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая стремится к своему предельному положению *касательной MT*. При этом $\varphi \to \alpha$, и если касательная не перпендикулярна оси Ox, то в силу непрерывности tgx $tg\,\varphi \to tg\,\alpha$. Таким образом получим угловой коэффициент касательной

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Предел, стоящий в правой части равенства называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $f'_x(x)$, y'_x.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Таким образом, мы получили, что угловой коэффициент касательной равен значению ее производной в точке касания.

$$k = tg\alpha = y'$$

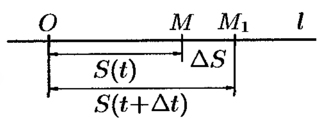
Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$ называется ***дифференцируемой*** в этом интервале, а операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Задача о скорости движения материальной точки.

Пусть материальная точка M движется неравномерно по некоторой прямой по закону $S = S(t)$, где t - время, S - координата точки (расстояние до начала координат т.О). Это уравнение – уравнение движения, оно выражает закон движения точки.



Задача. Зная закон движения точки, найти скорость движущейся точки в любой момент времени.

Пусть в некоторый момент времени времени t, точка занимает положение M: $OM = x = S(t)$, через время Δt, т.е. в момент $t + \Delta t$, точка окажется в M_1, где $OM_1 = S + \Delta S = S(t + \Delta t)$. За время Δt, точка проходит путь $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$.

Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скоростью точки за время Δt. Чем меньше Δt, тем точнее она выражает скорость движения точки в данный момент времени t. Предел средней скорости движении при $\Delta t \to 0$ называется ***скоростью движения точки в данный момент времени*** (или мгновенной скоростью).

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

По аналогии с задачей о касательной можно сказать, что полученное выражение представляет собой *производную* функции S по переменной t, т.е.

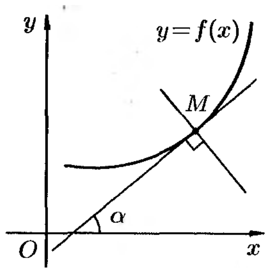
$$V = S'(t)$$

Таким образом, скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени. В этом заключается ***механический смысл производной***.

Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к кривой.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть ***скорость протекания этого процесса***. В этом состоит ***физический смысл производной***.

Вернемся к задаче о касательной. Мы нашли, что угловой коэффициент равен $k = tg\alpha = y'$, то есть $f'(x) = tg\alpha = k$, то есть производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке абсцисса которой равна x. В этом заключается ***геометрический смысл производной***.



Пусть точка касания M имеет координаты (x_0, y_0), тогда ее угловой коэффициент $k = f'(x_0)$. Так как касательная пройдет через точку касания M, используем уравнение (из аналитической геометрии) $y - y_0 = k(x - x_0)$ и перепишем его в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Это ***уравнение касательной***.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой***.

Так как нормаль перпендикулярна касательной используем условие перпендикулярности для нахождения ее углового коэффициента.

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Поэтому уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0.$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Запишем тождество $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x = y'\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = y'\cdot 0 = 0$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной.

Следствие. Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

Основные правила дифференцирования функций.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u\cdot v)' = u'v + v'u.$$

Доказательство:
$y = u \cdot v$
$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \rightarrow \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} \Rightarrow (uv)' = vu' + uv'$$
Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак производной.
$$y' = (C \cdot u)' = C \cdot u'$$
3. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v'(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v'(x) \neq 0$.

Производная сложной и обратной функций.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимой переменной x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u_x' в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y_u' в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y_x' в точке x, которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

То есть для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимой переменной***.

Это остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Правило. Если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над переменной x, то за промежуточный аргумент следует принять результат всех этих действий кроме последнего.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции***.

Производные основных элементарных функций.

Производная функции может быть найдена по следующей схеме:

- аргументу x даем приращение Δx;
- для функции y найдем соответсвующее приращение Δy;
- составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- находим результат этого отношения при условии, что $\Delta x \to 0$.

Результат предельного перехода $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

1. Найдем производную функции $y = C$, $C = const$.
Значению x даем приращение Δx и находим $y(x + \Delta x) = C$.
Тогда приращение функции: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = C - C = 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Получаем $(C)' = 0$.

2. (без доказательства). $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Поэтому $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$.

Формула производной степенной функции справедлива при любом *n* а не только натуральном.

Так $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Найдем производную $y = \sin x$.

Значению *x* даем приращение Δx и находим $y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

Приращение функции: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$ получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x$$

Получаем $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично можно получить $(\cos x)' = -\sin x$.

4. Для нахождения производной функции $y = tg\, x$ воспользуемся формулой производной частного.

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

По аналогии $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По такому же принципу можно найти производные

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},\ (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. Производные $y = e^x$, $y = a^x$.

Значению *x* даем приращение Δx и находим $y(x+\Delta x) = e^{x+\Delta x}$.

Приращение функции: $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\ /$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ получаем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\cdot\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a$$

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$, $y = \ln x$.

Пусть $y = \ln x$. $y(x+\Delta x) = \ln(x+\Delta x)$

Приращение функции:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \ln(x+\Delta x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\ /$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ получаем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Используя логарифмические преобразования можно получить $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$.

Гиперболические функции и их производные.

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются ***гиперболические функции***, определяемые следующими формулами:

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус;

$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус;

$thx = \dfrac{shx}{chx}$, $cthx = \dfrac{chx}{shx}$ - гиперболические тангенс и котангенс.

Графики функций:

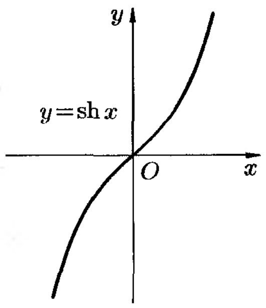


Рис. 132

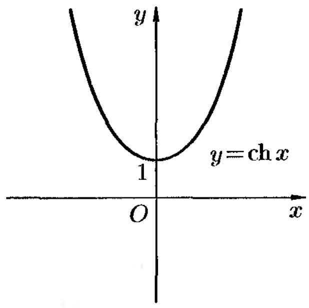
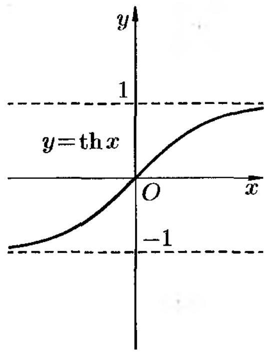
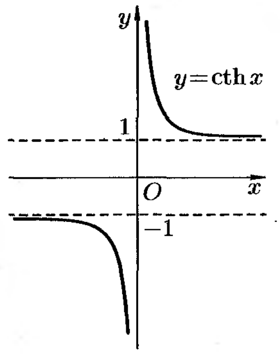


Рис. 133





Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости:

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x$$

$$sh2x = 2shx \cdot chx$$

Производные гиперболических функций.

Их можно найти используя определение функций и правила действия с производными.

$$(shx)' = chx,\ (chx)' = shx,\ (thx)' = \frac{1}{ch^2x},\ (cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}.$$

Таблица производных.

Все выведенные правила дифференцирования элементарных функций запишем в виде таблицы. Поскольку на практике чаще приходится находить производные от сложных функций в таблице формул аргументом является промежуточный аргумент *u*.

1. $(C)' = 0$;
2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, частный случай $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, частный случай $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, частный случай $(\log u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $(shu)' = chu \cdot u'$;
14. $(chu)' = shu \cdot u'$;
15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;
16. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций.

Особые случаи дифференцирования.

Логарифмическое дифференцирование.

В некоторых случаях перед вычислением производной полезно *предварительное логарифмирование*. Таким образом, например, можно продифференцировать степенно-показательную функцию $y = u^v$, где $u(x)$ и $v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x.

Найдем производную этой функции. Сначала логарифмируем функцию.

$$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow$$

$$y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right) \Rightarrow y' = u^v\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'\right)$$

Получаем формулу дифференцирования:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

Формула достаточно сложна для запоминания, поэтому можно дифференцировать такие функции по указанной схеме.

Примеры. 1. $y = (\sin x)^{arctgx}$

$$\ln y = \ln(\sin x)^{arctgx} = arctgx \cdot \ln(\sin x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (actgx)' \cdot \ln(\sin x) + (\ln(\sin x))' \cdot arctgx = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\sin x) +$$

$$+ \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot arctgx = \frac{\ln(\sin x)}{1+x^2} + ctgx \cdot arctgx$$

$$y' = (\sin x)^{arctgx}\left(\frac{\ln(\sin x)}{1+x^2} + ctgx \cdot arctgx\right)$$

2. В некоторых случаях логарифмическое дифференцирование применяют, хотя можно найти производную с помощью формул дифференцирования. Это делает дифференцирование менее громоздким.

$$y = \frac{(2x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{(2x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}\right) = \ln(2x+1)^2 + \ln\left(\sqrt[5]{x^2-3}\right) - \ln(5x-7)^3 =$$

$$= 2\ln(2x+1) + \frac{1}{5}\ln\left(x^2-3\right) - 3\ln(5x-7)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2-3} - 3\frac{5}{5x-7}$$

$$y' = \frac{(2x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x^2-3}}{(5x-7)^3}\cdot\left(\frac{4}{2x+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2x}{x^2-3} - \frac{15}{5x-7}\right)$$

Неявно заданная функция.

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, то функция задана в явном виде. Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y. Не всегда возможно разрешить уравнение относительно y.

Если функция задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x, полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример. $x^2 + xy + y^3 = 0$

$$2x + x'\cdot y + x\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0$$

$$2x + y + x\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0$$

$$2x + y + y'\cdot\left(x + 3y^2\right) = 0$$

$$y' = -\frac{2x+y}{x+3y^2}$$

Функция, заданная параметрически.

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где t – вспомогательная переменная (параметр).

Теорема. Если функция y от аргумента x задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и $\psi'(t)\neq 0$, то производная от этой функции есть

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

$$x'_t = 2t \quad y'_t = 3t^2 \quad y'_x = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

Производные высших порядков.

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется ***производной первого порядка.***

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается y'' (или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$).

Аналогично можно определить производные третьего порядка.

$y''' = (y'')'$.

Производной n – ного порядка (или n – ной производной) называется производная от производной $n-1$ порядка.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные порядка выше первого называется производными высших порядков. Обозначение: начиная с производной четвертого порядка римскими цифрами или числами в скобках.

Например: y^{IV}, $y^{(5)}$ - производные четвертого и пятого порядков.

Дифференциал функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение ее производной на приращение независимой переменной.

$dy = f'(x)\,\Delta x$.

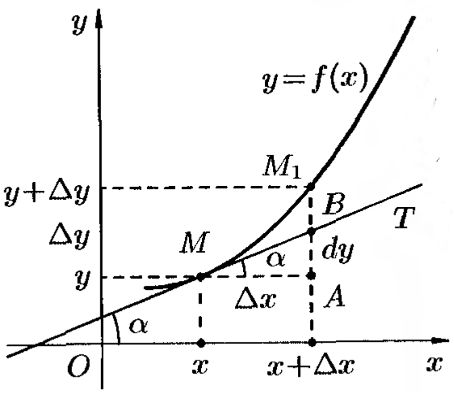
При $f(x) = x$ получим $f'(x) = 1$ и $dx = \Delta x$. То есть ***дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной***.

Поэтому записывают

$dy = f'(x)\,dx$.

Геометрический смысл дифференциала.

Проведем касательную MT к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем ординату B касательной в точке $x + \Delta x$. Из прямоугольного треугольника MAB: $tg\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}$, т.е. $|AB| = tg\alpha \cdot \Delta x$. На основании геометрического смысла производной $tg\alpha = f'(x)$, поэтому $|AB| = f'(x) \cdot \Delta x$ или $|AB| = dy$.



Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

На рисунке отрезки AM_1 и AB изображают соответственно приращение функции Δy и дифференциал dy. Найдем разницу между Δy и dy.

Так как $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то можно записать

$$y' - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \to 0$$ при $\Delta x \to 0$, то есть α – бесконечно малая величина.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \quad \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

Учитывая, что $\Delta x = dx$ запишем $\Delta y = y' \cdot dx + \alpha \cdot \Delta x = dy + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции представляет собой сумму двух слагаемых дифференциала функции и $\alpha\Delta x$. Второе слагаемое есть бесконечно малая величина.

Поэтому часто дифференциал функции называют ***главной частью приращения функции.***

$$\Delta y = dy + p$$

Т. е. истинное приращение функции с большой степенью точности можно заменить ее дифференциалом.

$$\Delta y \approx dy$$

Свойства дифференциала.

Так как дифференциал функции получается в результате о умножения ее производной на дифференциал независимого переменного, то из каждого свойства производной легко вывести соответствующее свойство дифференциала.

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \Rightarrow \quad y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u'_x \cdot dx \Rightarrow dy = y'_u \cdot du$$

Это свойство называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах таблицу производных можно преобразовать в таблицу дифференциалов.

Например: $d(\cos u) = (\cos u)' \cdot du = -\sin u \cdot du$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

На основании связи приращения функции и ее дифференциала можно записать, что для малых приращений Δx справедливо:

$$f(x + \Delta x) \cong f'(x)\Delta x + f(x).$$

Примеры. 1. Вычислить приближенно $\sqrt{16,06}$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x = 16 \quad \Delta x = 0,06 \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{16,06} \approx \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,06 + \sqrt{16} = \frac{1}{8} \cdot 0,06 + 4 = 4 + 0,0075 = 4,0075$$

Значение точное $\sqrt{16,06} = 4,00749...$

2.

Дифференциалы высших порядков.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ есть также функция от x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее *вторым дифференциалом* (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, при дифференцировании считаем его постоянным.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2$$

Обозначив $(dx)^2 = dx^2$ получим $d^2y = f''(x)dx^2$

Аналогично определяются дифференциалы 3 и более высоких порядков.

$d^3y = f'''(x)dx^3$ и т.д.

Дифференциал n – ного порядка $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$

Отсюда можно записать: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^{(n)}y}{dx^n}$.

В частности $f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Используя формулу для дифференциала второго порядка найдем ***вторую производную функции, заданной параметрически.***

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Вспомним, что первая производная находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ и используя формулу для дифференциала частного находим

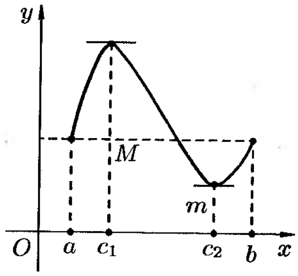
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{d(x(t))} = \frac{\dfrac{x'_t \cdot d(y'_t) - y'_t \cdot d(x'_t)}{(x'_t)^2}}{x'_t \cdot dt} = \frac{\dfrac{x'_t \cdot y''_{tt} \cdot dt - y'_t \cdot x''_{tt} \cdot dt}{(x'_t)^2}}{x'_t \cdot dt} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.



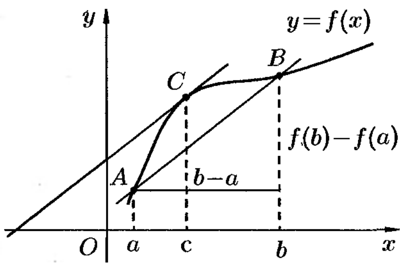
Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Эту формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении.***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Данная формула имеет простой геометрический смысл. Величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ это угловой коэффициент секущей АВ, а $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке c. Следовательно, на графике функции $y = f(x)$ найдется такая точка $C(c, f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.



Следствие из теоремы Лагранжа. (Признак постоянства функции). Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывнs на отрезке $[a; b]$, дифференцируемs на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши.

Правило Лопиталя. (Раскрытие неопределенностей.)

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \text{ то } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Исследование функций при помощи производных.

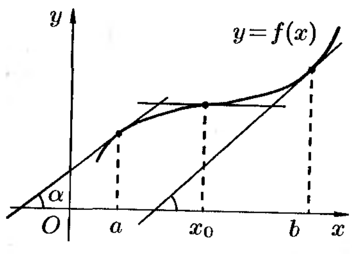
Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. (необходимый признак). Если дифференцируемая на интервале (a; b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство:

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a; b). Возьмем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на интервале (a; b) и рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Функция $f(x)$ возрастает, поэтому если $\Delta x > 0$ то $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$. Если $\Delta x < 0$ то $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x, следовательно



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Аналогично можно рассмотреть случай функции $f(x)$, убывающей на интервале (a; b).

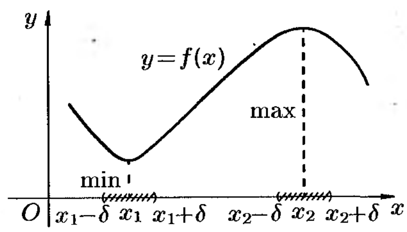
Геометрически это означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox.

Теорема. (достаточный признак). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a; b) и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a; b).

Экстремум функции.

Определение. Точка называется x_0 ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично, x_0 - ***точка минимума*** функции, если $\exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции.

Понятие экстремума связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во *внутренних точках* области определения.

Теорема. (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Обратная теорема неверна: то есть если $f'(x_0) = 0$, то это не значит что x_0 - точка экстремума.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Поэтому, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими.***

Теорема. (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ – окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Схема исследования функции на экстремум:

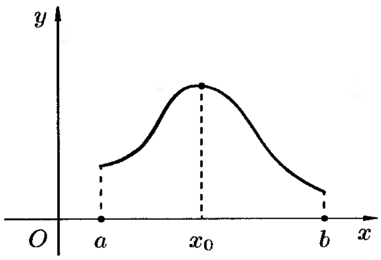
1. Найти критические точки функции $y = f(x)$.
2. Выбрать те точки, которые являются внутренними точками области определения функции.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки.
4. Определить точки экстремума в соответствии с достаточным условием и вычислить значения функции в них.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак сущесвования экстремума, основанный на определении второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум при $f''(x_0) > 0$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Нам известно, что такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т.е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a, b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.

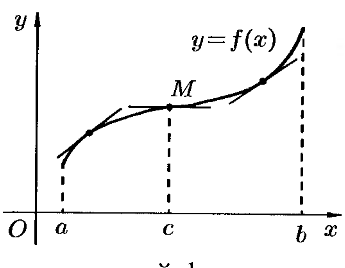


Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a; b].

1. Найти критические точки функции на интервале $(a; b)$.
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$.
3. Выбрать из всех чисел наибольшее и наименьшее значения.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Левее точки M касательные, проведенные к графику функции, находятся выше графика функции. Говорят, что в таком случае график является выпуклым вверх (выпуклым). Правее точки M все наоборот. Касательные лежат ниже графика функции и здесь график обращен выпуклостью вниз, то есть является вогнутым.



Определение. График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вниз*** (***выпуклым***)на интервале $(a; b)$, если $\forall x \in (a, b)$ соответствующая часть кривой расположена выше касательной и ***выпуклым вверх*** (***вогнутым***), если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке.

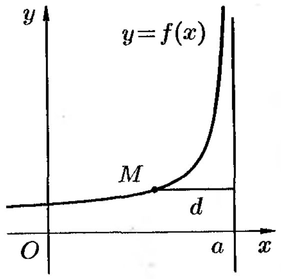
Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

Заметим, что угловой коэффициент касательных на участке (a, c) уменьшается, что означает что функция y' – убывающая, и , следовательно, $y'' < 0$, аналогично на участке (c, b) y' возрастает, и $y'' > 0$. То есть для исследования интервалов выпуклости и вогнутости будем использовать вторую производную.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ – график выпуклый вниз.

Теорема. (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции.



При исследовании функции для построения ее графика необходимо знать его асимптоты. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремиться к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Определение. Говорят, что прямая является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты записывается в виде $y = kx + b$.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ ($x \to +\infty$) *наклонную* асимптоту необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$ и тогда прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

Общая схема исследования функции и построение графика.

1. Найти область определения функции. Если функция имеет точки разрыва, определить их вид с помощью односторонних пределов. Определить вертикальные асимптоты.
2. Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (решив неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции.

Пример. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$

1. Область определения: $x \in (-\infty; 4) \cup (4 : +\infty)$. Функция не определена в точке $x = 4$. Исследуем ее на разрыв.

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=-\infty \quad \lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=+\infty$$

Таким образом $x = 4$ – вертикальная асимптота.

2. Пересечение с осью Ox: Решаем уравнение $\frac{(x+3)^2}{x-4}=0$, $x = -3$.

Пересечение с осью Оу: При $x = 0$ $y = -9/4$.

3. $\frac{(x+3)^2}{x-4}>0$ при $x\in(4:+\infty)$, $\frac{(x+3)^2}{x-4}<0$ при $x\in(-\infty;4)$.

4. Функция общего вида.

5. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+3)^2}{x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{(x-4)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{0}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{10x+9}{x-4}\right)=10$$

Наклонная асимптота: $y = x + 10$.

6. Возрастание и убывание.

$$y'=\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}\right)'=\frac{2(x+3)\cdot(x-4)-1\cdot(x+3)^2}{(x-4)^2}=\frac{(x+3)(2x-8-x-3)}{(x-4)^2}=\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}$$

$$y'=\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}=0$$

Критические точки $x = -3$, $x = 11$.

x	(-∞, -3)	-3	(-3, 4)	4	(4, 11)	11	(11, +∞)
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	возрастает	0	убывает	-	убывает	28	возрастает

7. Экстремумы в точках $x = -3$ – максимум, $x = 11$ – минимум.

8. Выпуклость и вогнутость.

$$y''=\left(\frac{(x+3)(x-11)}{(x-4)^2}\right)''=\left(\frac{(x^2-8x-33)}{(x-4)^2}\right)''=\frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2-2(x-4)\cdot(x^2-8x-33)}{(x-4)^4}=$$

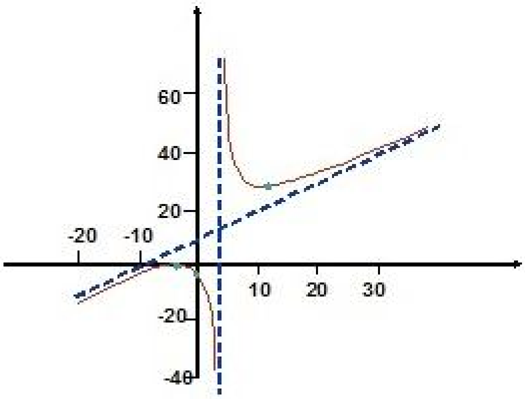
$$=\frac{(x-4)(2x^2-16x+32-2x^2+16x+66)}{(x-4)^4}=\frac{98}{(x-4)^3}$$

$$y''=\frac{98}{(x-4)^3}=0$$

Нет критических точек второго порядка.

x	(-∞, 4)	4	(4, +∞)
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	вогнута	-	выпукла

Теперь можно нарисовать график функции:


60
40
20
-20
-10
10
20
30
-20
-40