Лекция 4.
Задача о назначениях.

Постановка задачи. Институт получил гранты на выполнение четырех исследовательских проектов. Выходные результаты для первого проекта являются входными данными ля второго проекта, выходные данные для второго проекта – это входные данные для третьего проекта, выходные результаты третьего проекта используются для работы над четвертым проектом. В качестве научных руководителей проектов рассматриваются кандидатуры четырех ученых, обладающих различным опытом и способностями. Каждый ученый оценил время, необходимое ему для работы над проектом. Таблица необходимого времени (в месяцах):

Ученые / Проекты	1	2	3	4
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Требуется выбрать научного руководителя для каждого из проектов, так чтобы суммарное время для выполнения всех проектов было минимальным.

Такая задача является ***задачей о назначениях***.

В общем виде следующая формулировка: имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Затраты i – того кандидата на выполнение j – той работы равны c_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$). Каждый кандидат может быть назначен на одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначения кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работ минимальны.

Математическая модель.

Пусть x_{ij} – переменные, значения которых равно 1, если i – ый кандидат выполняет j – тую работу, и 0 в противоположном случае. $x_{ij} \in \{0;1\}$

Условие, что один кандидат выполняет только одну работу, запишем:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = 1,2,\ldots,n)$$

Условие о том, что каждая работа может выполняться только 1 кандидатом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = 1,2,\ldots,n)$$

Целевая функция: $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min$.

Задачу о назначениях можно рассматривать, как транспортную задачу в которой претенденты это «исходные пункты», а вакансии – «пункты назначения», c_{ij} имеет смысл «стоимости перевозки».

Решение задачи о назначениях. Венгерский метод решения.

Так как задача о назначениях аналогична транспортной задаче, то для ее решения можно было бы использовать соответствующие алгоритмы. Однако они неэффективны в силу вырожденности матрицы (из-за того что и по строкам и по столбцам суммы равны 1).

Для решения составим таблицу аналогичную транспортной таблице.

№	1		j		n
1	c_{11}		…		c_{1n}
i	…		c_{ij}		…
n	c_{m1}		…		c_{mn}

В таблице в левой колонке записаны номера кандидатов, в верхней колонке – номера работ. c_{ij} – затраты на выполнение работ.

В венгерском методе используется следующий принцип: оптимальность решения не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) на одну и ту же величину. Т. е в таблице, где c_{ij} – затраты, получают измененные затраты $c'_{ij} \geq 0$ и отыскивают такой набор управляющих переменных x_{ij}, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} = 0$. Тогда те ячейки, в которых стоят эти 0 затраты являются решением.

В венгерском методе решают задачу на минимум целевой функции, если задача поставлена на максимум, то ее преобразуют, вводя вспомогательную функцию $Z' = -Z$.

Алгоритм состоит из двух этапов.

1 этап. Подготовительная работа с матрицей затрат.

Предварительная обработка матрицы с целью получения нулей.

2 этап. Нахождение минимальной конфигурации.

Подготовительный этап.

Получают нули в каждой строке и столбце. Для этого в каждой строке определяют наименьший элемент, и его значение отнимают от всех элементов этой строки. Затем в преобразованной таблице в каждом столбце определяют минимальный элемент и его значение вычитают из всех элементов этого столбца.

Рассмотрим подготовительный этап на примере задачи о назначениях работ.

	1	2	3	4	*min*
1	3	7	5	8	3
2	2	4	4	5	2
3	4	7	2	8	2
4	9	7	3	8	3

Вычитаем минимальные элементы строк.

	1	2	3	4
1	0	4	2	5
2	0	2	2	3
3	2	5	0	6
4	6	4	0	5
min	0	2	0	3

Вычитаем минимальные элементы столбцов.

	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

Теперь можно приступить ко второму этапу нахождения оптимального решения.

Нахождение минимальной конфигурации.

1 шаг. Просматривают строку, содержащую наименьшее число 0. Отмечают один из нулей этой строки и зачеркивают все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится отмеченный ноль. Аналогичные операции производят для всех строк. Если назначение, которое получено при всех отмеченных нулях, является полным (то есть число отмеченных нулей равно n), то решение является оптимальным, если нет, то переходят к шагу 2.

Пример.

	1	2	3	4
1	0*	2	2	2
2	Ø	0*	2	Ø
3	2	3	0*	3
4	6	2	Ø	2

2 шаг. Поиск минимального набора строк и столбцов содержащих все нули. Цель провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих, по крайней мере, 1 раз все нули.

Для этого необходимо отметить:

1. Все строки, в которых не имеется ни одного отмеченного нуля 0*.
2. Все столбцы, содержащие перечеркнутый 0, хотя бы в одной из отмеченных строк.
3. Все строки, содержащие отмеченные нули хотя бы в одном из отмеченных столбцов.

Вычеркиваем отмеченный столбец и не отмеченные строки.

	1	2	3	4	
1	0*	2	2	2	
2	Ø	0*	2	Ø	
3	2	3	0*	3	+
4	6	2	Ø	2	+
			+		

Шаг 3. В оставшихся невычеркнутыми клетках находим минимальный элемент и вычтем его из невычеркнутых клеток. Прибавим это значение к клеткам на пересечении вычеркнутых строк и столбцов.

Получим новую матрицу, снимаем в ней все предыдущие отметки и вновь отмечаем в ней нули как в шаге 1.

1	0*	2	4	2	
2	Ø	0*	4	Ø	
3	0	1	0*	1	+
4	4	0	Ø	0	+
			+		

Минимальный элемент в невычеркнутых ячейках равен 2.

	1	2	3	4
1	0*	2	4	2
2	Ø	0*	4	Ø
3	Ø	1	0*	1
4	4	Ø	Ø	0*

Количество отмеченных нулей в нашей матрице равно 4, поэтому мы нашли оптимальное решение.

Ученые Проекты	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Значение целевой функции $Z = 3+4+2+8=17$.

Пример 2. Пусть управление механизации имеет 5 кранов и требуется возвести 5 объектов. Известна себестоимость строительства каждым краном отдельного объекта. Требуется так распределить машины по объектам, чтобы обеспечить возведение всех объектов с минимальными суммарными затратами. Исходная информация представлена в табл.

Объекты Краны	1	2	3	4	5
1	30	70	50	80	60
3	20	40	40	50	70
3	40	70	20	80	90
4	90	70	30	80	100
5	60	40	30	60	70

Составим математическую модель для задачи о кранах.

$$Z = 30x_{11} + 70x_{12} + 50x_{13} + 80x_{14} + 60x_{15} + \ldots$$

$$\ldots + 60x_{51} + 40x_{52} + 30x_{53} + 60x_{54} + 70x_{55} \to \min$$

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1\\
x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1\\
x_{ij}\in\{0;1\},\ x_{ij}\geq 0
\end{cases}
$$

Решение получим с помощью надстройки **Поиск решения** в EXCEL.

Задача о назначениях

Стоимость работ

Краны \ Объекты	1	2	3	4	5
1	30	70	50	80	60
2	20	40	40	50	70
3	40	70	20	80	90
4	90	70	30	80	100
5	60	40	30	60	70

Распределение кранов по объектам

Краны \ Объекты	1	2	3	4	5		
1	0	0	0	1	0	1	1
2	1	0	0	0	0	1	1
3	0	1	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	1	0	0	1	1
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1		
Целевая функция	300						

Нелинейные математические модели. Постановка задачи нелинейного программирования.

В общем виде задача нелинейного программирования (ЗНП) формулируются следующим образом

$$f(x_1,\dots,x_n)\to\max(\min) \qquad (1)$$

$$
\begin{cases}
g_i(x_1,\dots,x_n)\leq b_i & i=\overline{1,m_1}\\
\quad\dots & \\
g_i(x_1,\dots,x_n)\geq b_i & i=\overline{m_1+1,m_2}\\
\quad\dots & \\
g_i(x_1,\dots,x_n)=b_i & i=\overline{m_2+1,m}
\end{cases} \qquad (2)
$$

где x_j – управляющие переменные или решение ЗНП,

b_i $(i = 1,\dots,m)$ – фиксированные параметры,

f_i, g_i – заданные функции n переменных.

Решить ЗНП – найти такие значения управляющих переменных x_j, которые удовлетворяют системе ограничений (2) и доставляют максимум или минимум функции f.

Для задач нелинейного программирования нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции (1) и ограничений (2) разработано несколько специальных методов, например, метод множителей Лагранжа, градиентные методы, графические методы, и другие.

Геометрическая интерпретация ЗНП.
Графический метод решения.

Если в ЗНП содержаться только 2 управляющие переменные, то задачу удобно решать графически.

Пусть $f(x_1, x_2) \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2) \le b_i \\ g_i(x_1, x_2) \ge b_i \\ g_i(x_1, x_2) = b_i \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) определяет в пространстве область – область допустимых решений задачи.

Решить задачу графически – это значит найти точку области допустимых решений, через которую проходит линия $f(x_1, x_2) = C$ наивысшего (низшего) уровня. Указанная точка может находится также внутри ОДР в отличие от линейных задач.

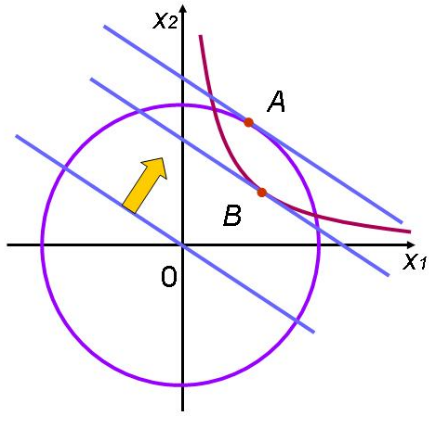
Алгоритм решения ЗНП графическим методом.

1. На плоскости x_1Ox_2 Строят область допустимых решений, убеждаясь, что она непустая, т.е. ограничения совместны.
2. Строят линии уровня функции $f(x_1, x_2) = C$.
3. Определяют направление возрастания (убывания) функции f.
4. Находят точку ОДР, через которую проходит линия уровня $f(x_1, x_2) = C$ с наибольшим (наименьшим) значением C. Определяют x_1 и x_2 этой точки.

Пример: $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min)$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 3 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Строим ОДР



Гипербола: $x_2 = \frac{3}{x_1}$.

Окружность: $x_1^2 + x_2^2 = 4^2$.

Функция возрастает в направлении вектора $\vec{n} = (2,3)$.

Максимум в точке А; минимум в точке В.

Точка A – точка касания. Тангенсы углов прямой $2*x_1+3*x_2=C_1$ и окружности $x_1^2+x_2^2=16$ совпадают.

$$tg\alpha = -\frac{2}{3}$$

Найдем $tg\alpha$ у окружности. Считая уравнение неявным заданием функции $x_1^2+x_2^2=16$ от x_1

$$2x_1 + 2x_2 \cdot x_2' = 0 \qquad x_2' = -\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{3}$$

т.е. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \end{cases}$ следовательно $x_1 = \frac{12}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \frac{12}{\sqrt{3}}$; $f_{max} = \frac{52}{\sqrt{13}}$

Аналогично можно определить координаты B, в которой совпадают тангенсы угла наклона касательной и $x_1*x_2=3$.

$x_2' = -\frac{3}{x_2^2}$ следовательно $x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $f_{min} = \frac{12}{\sqrt{2}}$.

Метод множителей Лагранжа.

Пусть требуется решить ЗНП следующего вида.

$$f(x_1,\ldots,x_n) \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \quad\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{cases}$$

где функции f, g – непрерывны и непрерывны их частные производные по x_j. Для такой задачи может быть применен метод множителей Лагранжа.

Пусть функция и ограничения зависят только от двух переменных: x_1 и x_2.

$$f(x_1, x_2) \to \max$$

$$g(x_1, x_2) = b$$

На плоскости x_1Ox_2 выражение $g(x_1,x_2) = b$ определяет график некоторой функции, как на рисунке, где также изображены линии уровня $f(x_1,x_2) = C$ и направление возрастания. x_1 $f(x_1, x_2) \to \max$

В точке A функция f достигает максимума и следовательно в этой точке совпадают касательные линии к графикам функции $f(x_1,x_2) = C$ и $g(x_1,x_2) = b$, следовательно в точке А векторы нормали к этим функция пропорциональны. Пусть это $\vec{l}$ и $\vec{k}$ соответственно, тогда $\vec{l} = \lambda\vec{k}$ (векторы коллинеарны), где λ - некоторый коэффициент пропорциональности.

Вспомним, что вектор нормали имеет как координаты градиент функции, т.е. $\vec{l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$, $\vec{k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}; \frac{\partial g}{\partial x_2}\right)$.

Таким образом, имеем условия $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}$.

Добавляем условие принадлежности точки А линии $g(x_1,x_2)=b$, и таким образом имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \quad g(x_1,x_2)=b \\ g(x_1,x_2)=b \end{cases}$$

Введем функцию $F(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda(b-g(x_1,x_2))$. Тогда система будет переписана в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = b - g(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

Функция F называется функцией Лагранжа.

В общем виде для n переменных:

1. Функция Лагранжа

$$F(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g}{\partial x_j}=0 \quad (j=1,\dots,n)$$

2. Составляют систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i \dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad j=1,\dots,n \\ \qquad g(x_1,\dots,x_n)=b_i \end{cases}$$

Решают систему и определяют точки, в которых $f(x_1,\dots,x_n)$ может иметь экстремум.

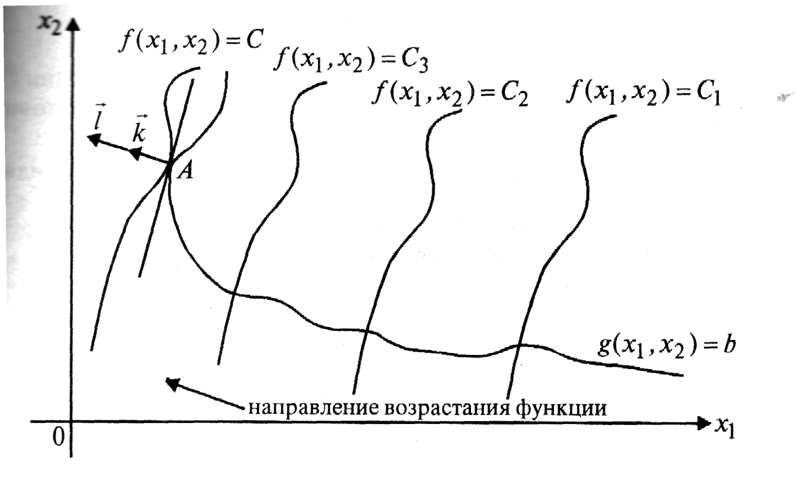
Проверяют полученные точки на экстремум и определяют экстремальные значения функции f в заданной точке.

Пример расчета экономико-математической модели при нелинейных затратах на производство.

Фирма реализует автомобили: через магазин и через торговых агентов. При реализации x_1 автомобилей через магазин расходы составляют $x_1^2+4x_1$ у.е., при реализации x_2 автомобилей через торговых агентов расходы x_2^2.

Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий общие расходы, если на продажу идет 200 автомобилей.

Математическая модель: $R=4x_1+x_1^2+x_2^2 \to \min$ (сумма расходов).



x_1, x_2 – управляющие переменные.

Т.е. $4x_1+x_1^2+x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+x_2=200 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Применим метод множителей Лагранжа.

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \lambda(200 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + 4 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения $x_1 = 99$, $x_2 = 101$, $\lambda = 202$.

Исследуем полученную точку на экстремум:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

т.е. по теореме о достаточном условии существования экстремума функции имеем экстремум в данной точке.

Так как $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 > 0$, то это минимум.

Графическая интерпретация:

$$f = x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 = (x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 4$$

Это окружности с центром (-2, 0).