Дифференциал функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение ее производной на приращение независимой переменной.

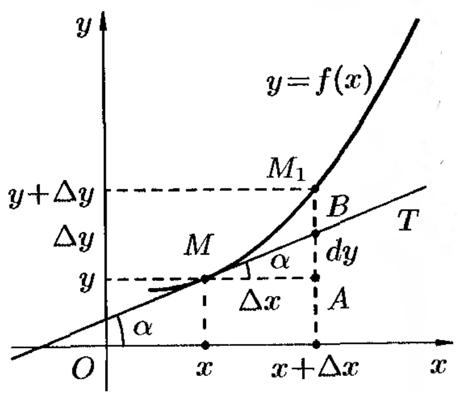
$dy = f'(x)\,\Delta x$.

При $f(x) = x$ получим $f'(x) = 1$ и $dx = \Delta x$. То есть ***дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной***.

Поэтому записывают

$dy = f'(x)\,dx$.

Геометрический смысл дифференциала.



Проведем касательную MT к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx и найдем ординату B касательной в точке $x + \Delta x$. Из прямоугольного треугольника MAB: $tg\alpha = \dfrac{|AB|}{\Delta x}$, т.е. $|AB| = tg\alpha \cdot \Delta x$. На основании геометрического смысла производной $tg\alpha = f'(x)$, поэтому $|AB| = f'(x)\cdot \Delta x$ или $|AB| = dy$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

На рисунке отрезки AM_1 и AB изображают соответственно приращение функции Δy и дифференциал dy. Найдем разницу между Δy и dy.

Так как $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то можно записать

$y' - \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть α – бесконечно малая величина.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \quad \Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Учитывая, что $\Delta x = dx$ запишем $\Delta y = y' \cdot dx + \alpha \cdot \Delta x = dy + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции представляет собой сумму двух слагаемых дифференциала функции и $\alpha\Delta x$. Второе слагаемое есть бесконечно малая величина.

Поэтому часто дифференциал функции называют ***главной частью приращения функции.***

$\Delta y = dy + p$

Т. е. истинное приращение функции с большой степенью точности можно заменить ее дифференциалом.

$\Delta y \approx dy$

Свойства дифференциала.

Так как дифференциал функции получается в результате о умножения ее производной на дифференциал независимого переменного, то из каждого свойства производной легко вывести соответствующее свойство дифференциала.

Теорема. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v)=du+dv$$

$$d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

Теорема. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \Rightarrow \quad y'_x\cdot dx=y'_u\cdot u'_x\cdot dx \Rightarrow dy=y'_u\cdot du$$

Это свойство называют ***инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала.***

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах таблицу производных можно преобразовать в таблицу дифференциалов.

Например: $d(\cos u)=(\cos u)'\cdot du=-\sin u\cdot du$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

На основании связи приращения функции и ее дифференциала можно записать, что для малых приращений Δx справедливо:

$$f(x+\Delta x)\cong f'(x)\Delta x+f(x).$$

Дифференциалы высших порядков.

Пусть $y=f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x – независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy=f'(x)\,dx$ есть также функция от x; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ называется ее *вторым дифференциалом* (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$.

Так как $dx=\Delta x$ не зависит от х, при дифференцировании считаем его постоянным.

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)dx\cdot dx=f''(x)(dx)^2$$

Обозначив $(dx)^2=dx^2$ получим $d^2y=f''(x)dx^2$

Аналогично определяются дифференциалы 3 и более высоких порядков.

$d^3y=f'''(x)dx^3$ и т.д.

Дифференциал n – ного порядка $d^{(n)}y=f^{(n)}(x)dx^n$

Отсюда можно записать: $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^{(n)}y}{dx^n}$.

В частности $f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f'''(x)=\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Используя формулу для дифференциала второго порядка найдем ***вторую производную функции, заданной параметрически.***

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

Вспомним, что первая производная находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ и используя формулу для дифференциала частного находим

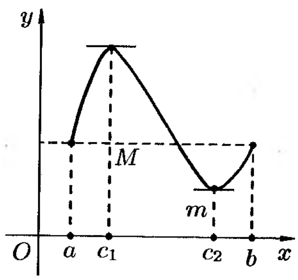
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{d(x(t))} = \frac{\dfrac{x'_t \cdot d(y'_t) - y'_t \cdot d(x'_t)}{(x'_t)^2}}{x'_t \cdot dt} = \frac{\dfrac{x'_t \cdot y''_{tt} \cdot dt - y'_t \cdot x''_{tt} \cdot dt}{(x'_t)^2}}{x'_t \cdot dt} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.



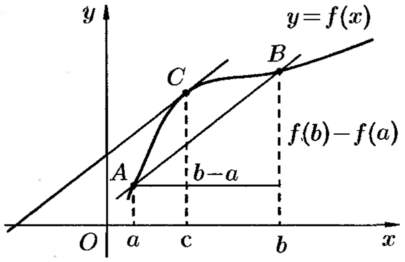
Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эту формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении.***

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Данная формула имеет простой геометрический смысл. Величина $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ это угловой коэффициент секущей АВ, а $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке c. Следовательно, на графике функции $y = f(x)$ найдется такая точка $C(c, f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.



Следствие из теоремы Лагранжа. (Признак постоянства функции). Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывнs на отрезке $[a;\, b]$, дифференцируемs на интервале $(a;\, b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши.

Правило Лопиталя. (Раскрытие неопределенностей.)

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Исследование функций при помощи производных.

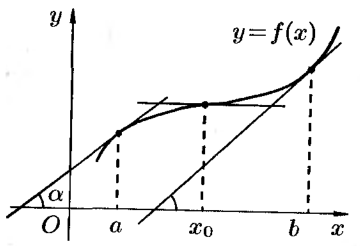
Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. (необходимый признак). Если дифференцируемая на интервале $(a;\, b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Доказательство:

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;\, b)$. Возьмем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на интервале $(a;\, b)$ и рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Функция $f(x)$ возрастает, поэтому если $\Delta x > 0$ то $x + \Delta x > x$ и $f(x + \Delta x) > f(x)$. Если $\Delta x < 0$ то $x + \Delta x < x$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x, следовательно



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогично можно рассмотреть случай функции $f(x)$, убывающей на интервале $(a;\, b)$.

Геометрически это означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox.

Теорема. (достаточный признак). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\, b)$ и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;\, b)$.