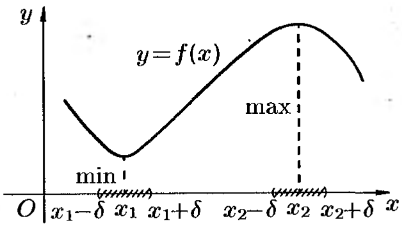
Экстремум функции.

Определение. Точка называется x_0 ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично, x_0 - ***точка минимума*** функции, если $\exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.



Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции.

Понятие экстремума связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во *внутренних точках* области определения.

Теорема. (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Обратная теорема неверна: то есть если $f'(x_0) = 0$, то это не значит что x_0 - точка экстремума.

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Поэтому, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими.***

Теорема. (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ – окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Схема исследования функции на экстремум:

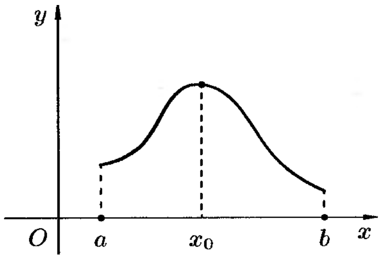
1. Найти критические точки функции $y = f(x)$.
2. Выбрать те точки, которые являются внутренними точками области определения функции.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки.
4. Определить точки экстремума в соответствии с достаточным условием и вычислить значения функции в них.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак сущесвования экстремума, основанный на определении второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум при $f''(x_0) > 0$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Нам известно, что такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т.е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a, b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.

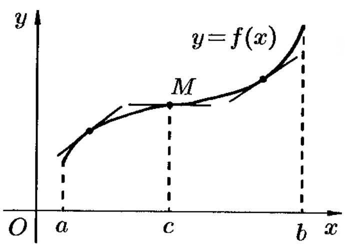


Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a; b].

1. Найти критические точки функции на интервале (a; b).
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$.
3. Выбрать из всех чисел наибольшее и наименьшее значения.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Левее точки М касательные, проведенные к графику функции, находятся выше графика функции. Говорят, что в таком случае график является выпуклым вверх (выпуклым). Правее точки М все наоборот. Касательные лежат ниже графика функции и здесь график обращен выпуклостью вниз, то есть является вогнутым.



Определение. График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вниз*** (***выпуклым***)на интервале (a; b), если $\forall x \in (a, b)$ соответствующая часть кривой расположена выше касательной и ***выпуклым вверх*** (***вогнутым***), если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его части разной выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

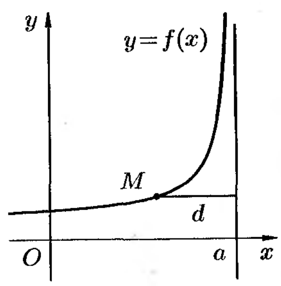
Заметим, что угловой коэффициент касательных на участке (a, c) уменьшается, что означает что функция y' – убывающая, и , следовательно, $y'' < 0$, аналогично на участке (c, b) y' возрастает, и $y'' > 0$. То есть для исследования интервалов выпуклости и вогнутости будем использовать вторую производную.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$– график выпуклый вниз.

Теорема. (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции.

При исследовании функции для построения ее графика необходимо знать его асимптоты. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.



Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремиться к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Определение. Говорят, что прямая является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Уравнение наклонной асимптоты записывается в виде $y = kx + b$.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ ($x \to +\infty$) *наклонную* асимптоту необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right) = b$ и тогда прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

Общая схема исследования функции и построение графика.

1. Найти область определения функции. Если функция имеет точки разрыва, определить их вид с помощью односторонних пределов. Определить вертикальные асимптоты.
2. Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (решив неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$)).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции.